

# ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE • BAND 35 • HEFT 3 • JUNI 1939

## *Über die Raumverteilung der Trägerwolken aus Photoabsorption und Streuabsorption bei der Luftionisation durch Röntgenstrahlen*

### *II. Teil*

*Von Hans Küstner*

(Aus dem Institut für Medizinische Physik der Universität Göttingen)

(Mit 13 Abbildungen)

In einer Untersuchung über diese Fragestellung, die kürzlich<sup>1)</sup> in dieser Zeitschrift erschien und im folgenden kurz mit (I) bezeichnet werden soll, konnte der Verf. sowohl über den Anteil beider Arten von Trägerbildung an der Gesamtionisation als auch über deren räumliche Verteilung quantitative Angaben machen. Als experimentelle Unterlage dienten Untersuchungen des Verf.<sup>2)</sup> über die Luftionisation in zylindrischen Faßkammern von gleicher wirksamer Länge, aber von verschiedenem Radius, die mit extrem stark gefilterten und daher weitgehend homogenisierten Röntgenstrahlen durchgeführt worden waren. Drückt man die bei einer bestimmten Strahlung in Kammern von verschiedenem Radius  $\rho$  beobachteten Ionisationen als Bruchteil derjenigen Ionisation aus, die eine Kammer von praktisch unendlich großem Radius liefert<sup>3)</sup>, und trägt man diese relative Ionisation in Abhängigkeit vom Radius  $\rho$  auf, so erhält man eine „Integralkurve“, die angibt, welcher Bruchteil aller überhaupt durch die gegebene Strahlung erzeugbaren Träger innerhalb eines mit dem Strahlenbündel coaxialen Zylinders  $\rho$  entsteht. Führt man dasselbe auch für andere Strahlungen durch, so erhält man eine Schar von Integralkurven; diese zeigen gegenseitige Überschneidungen und Wendepunkte, die sich, wie in (I) dargetan wurde, ganz systematisch mit der Härte der Strahlung verschieben. Durch graphische Differentiation erhält man aus den Integralkurven eine Schar von „Differentialkurven“. Jede derselben gibt für die zu-

<sup>1)</sup> Der Radius einer Kammer ist dann „praktisch“ unendlich groß, wenn eine noch größere Kammer keine größere Ionisation mehr liefert, d. h., wenn keine Elektronenbahnen mehr die Kammerwandung erreichen und somit kein „Trägerausfall“ eintritt.

gehörige Strahlung an, welcher Bruchteil aller Träger zwischen zwei koaxialen Nachbarzylindern der Radien  $\varrho$  und  $\varrho + \Delta\varrho$  pro Abstand  $\Delta\varrho$  entsteht. Dabei zeigte sich, daß zwei Wolken von Trägern vorhanden sind, deren eine, um das Röntgenstrahlenbündel gelagerte, durch Streuabsorption (also Rückstoß- oder Comptonelektronen), und deren andere, weiter außen liegende, durch Photoabsorption (also Photoelektronen) entsteht. Beide Wolken waren entweder räumlich völlig getrennt oder sie überlagerten sich so, daß ihre analytische Trennung in vielen Fällen möglich war. Dabei zeigte sich hinsichtlich Ausdehnung und Trägerinhalt der Wolken ein systematischer Zusammenhang mit der Härte der Röntgenstrahlen, der auch quantitativ so gut mit unseren Kenntnissen übereinstimmt, als erwartet werden kann.

Der kleinste Kammerradius  $\varrho$ , für den Untersuchungen vorliegen, beträgt 1 cm. Es wurde nun in (I) angenommen, daß es erlaubt sei, mit einem unendlich dünnen Röntgenstrahlenbündel zu rechnen und demgemäß die Integralkurven für  $\varrho < 1$  so zu extrapolieren, daß sie für  $\varrho = 0$  den Wert Null annehmen. Dabei ergab sich zwangsläufig die Notwendigkeit, die Integralkurve für die weichste Strahlung, bei der die Primärelektronen die kleinste Reichweite haben, vom Nullpunkt aus am steilsten, und die Integralkurve für die härteste Strahlung mit der größten Reichweite der Primärelektronen unter geringster Steilheit ansteigen zu lassen. Dies ließ sich auch rechtfertigen durch die mit unseren Erfahrungen im Einklange stehende Annahme, daß die Trägerbildung in Kolonnen erfolgt. Daß die Annahme eines unendlich dünnen Röntgenstrahlenbündels indessen nur eine für die bisherigen Betrachtungen zulässige Näherung darstellt, zeigt sich besonders deutlich dann, wenn wir einen Schritt weitergehen und nach der Dichte der Träger im Abstande  $\varrho$  von der Achse der Zylinderkammer fragen. Die relative Dichte der Träger — relativ deshalb, weil wir uns auf die in einer unendlich großen Kammer entstandene Trägerzahl beziehen — erhalten wir offenbar dann, wenn wir jeden Wert einer Differentialkurve durch das zugehörige  $2\pi\varrho$  dividieren. Für große Werte von  $\varrho$ , gegen die der wirkliche Radius des Strahlenbündels klein ist, erhalten wir dann ein fast völlig richtiges Ergebnis. Je kleiner wir aber  $\varrho$  wählen, desto größere Werte nimmt die Dichte an, und für  $\varrho = 0$  wird ihr Wert unendlich. Das kann natürlich nicht sein und beruht auf unserer für die Dichtebetrachtung nicht mehr zulässigen Annahme, daß alle Primärelektronen innerhalb eines unendlich dünnen Röntgenstrahlenbündels, d. h. innerhalb eines Volumens Null, ihren Ursprung haben.

Für die Sicherung der bisherigen Ergebnisse (I) sowie für Angaben über die Dichte der Träger an den verschiedenen Punkten des Raumes scheint es daher notwendig zu sein, die Verteilung der Träger innerhalb eines Röntgenstrahlenbündels vom Radius  $r > 0$  sowie in seiner Umgebung einer näheren Überprüfung zu unterziehen; die Rechnung wird, im Rahmen der Zuverlässigkeit unserer vereinfachenden Annahmen, auch Aussagen über die Dichteverteilung innerhalb des Bündels und in seiner Umgebung zulassen.

Als Grundlage unserer Betrachtung dient wieder die Annahme der Ionisation in Kolonnen, die mit der Erfahrung im Einklang steht. Darüber hinaus müssen wir aber einige vereinfachende Annahmen machen, ohne welche die Rechnung zu verwickelt wird, um sich durchführen zu lassen. Und zwar nehmen wir an, die Primärelektronen sollten erstens *gleiche Richtungsverteilung*, zweitens *dieselbe Reichweite  $R$* , drittens *geradlinige Bahn* besitzen und viertens in jedem Zentimeter ihrer Bahn *dieselbe Zahl  $s$  von Trägern* erzeugen. Nun hat zwar Kulenkampff<sup>3)</sup> überzeugend dargetan, daß einem Elektron bestimmter Anfangsgeschwindigkeit in Luft von Atmosphärendruck auch eine bestimmte Bahnlänge zukommt; aber die Bahnen verlaufen gekrümmt und geknickt und außerdem nimmt die Voltgeschwindigkeit des Elektrons bei Erzeugung jedes Trägerpaares um einen bestimmten Betrag ab [Kulenkampff<sup>3)</sup>, <sup>4)</sup> sowie Eisl<sup>5)</sup>], so daß gegen das Bahnende zu  $s$  immer höhere Werte erreicht. Weiterhin besitzen bei einer gegebenen Wellenlänge der Röntgenstrahlen die Photoelektronen zwar eine einheitliche Anfangsgeschwindigkeit, aber eine Richtungsverteilung im Sinne einer „Voreilung“; die Comptonelektronen aber zeigen nicht nur eine ausgeprägte Verteilung in der Häufigkeit ihrer Emissionsrichtung, sondern auch eine ganz ausgeprägte Verteilung ihrer Anfangsgeschwindigkeit in dem Sinne, daß die Comptonelektronen mit der größeren Geschwindigkeit in Richtung der Röntgenstrahlen, die Elektronen rechtwinklig dazu mit der Geschwindigkeit Null emittiert werden. Indessen tritt, durch die schnell einsetzenden Bahnkrümmungen, alsbald ein Zustand ein, der den anfänglichen Zustand der Richtungsverteilung verwischt und dem der allseitig gleichen Richtungsverteilung nahe kommt. Mit dem Einfluß dieser Erscheinungen auf das Versuchsergebnis haben wir uns bereits in (I) eingehend beschäftigt. Wir müssen uns aber klar darüber sein, daß infolge unserer vereinfachenden Annahmen unsere Rechnung nur eine Näherung darstellen kann. Immerhin wird sich zeigen, daß ihre Ergebnisse in allen grundlegenden Dingen entweder mit den Versuchsergebnissen übereinstimmen, oder daß Abweichungen zwischen beiden auf unseren vereinfachenden Annahmen beruhen.

Die Rechnung wird daher auch in der Lage sein, uns — zum wenigsten qualitativ — Fragen zu beantworten, für die die experimentellen Grundlagen fehlen. Das gilt z. B. für die Verteilung der Trägerdichte innerhalb des Röntgenstrahlenbündels und in seiner Umgebung.

Für unsere Rechnung gehen wir von folgendem aus:

Durch Röntgenstrahlen gegebener Intensität und Härte mögen bei Bestrahlung von  $1 \text{ cm}^3$  Luft von Normaldichte  $Z$  Primärelektronenbahnen in der Sekunde entstehen, deren jede geradlinig verläuft und eine Reichweite von  $R \text{ cm}$  besitzt. Sehen wir von der Luftschwächung der Röntgenstrahlen längs ihres Weges durch die Kammer ab [was für unsere harten Strahlungen der Untersuchung (I) zulässig ist], so werden also durch ein Röntgenstrahlenbündel von  $1 \text{ cm}^2$  Querschnitt, dessen wirksame Länge in der Kammer  $L \text{ cm}$  beträgt, insgesamt  $Z \cdot L$  Primärelektronenbahnen pro Sekunde erzeugt. Wir nehmen weiterhin an, das Röntgenstrahlenbündel habe kreisrunden Querschnitt, sein Radius sei  $r \text{ cm}$  und seine Achse falle mit der Achse der betrachteten zylindrischen Räume vom Radius  $\varrho$  und der Achse der Ionisationskammern zusammen.

#### I. Berechnung für den Bereich innerhalb des Röntgenstrahlenbündels

Wir legen unseren Betrachtungen die Grenzbedingung

$$(1) \quad r \leq \frac{R}{2}$$

zugrunde. Dabei haben wir zwei Fälle getrennt zu behandeln, nämlich erstens Elektronenbahnen, die innerhalb  $\varrho$  ihren Ursprung haben (Fall A), und zweitens solche, die zwischen  $\varrho$  und  $r$  entstehen (Fall B).

##### A. Ursprung der Elektronenbahnen zwischen $\varrho = 0$ und $\varrho \leq r$

In Abb. 1a ist eine Ebene dargestellt, die unsere Zylinder senkrecht schneidet; die Achse der Zylinder geht durch  $M$ . Innerhalb  $\varrho$  habe ein Punkt  $P$  den Abstand  $\delta$  von  $M$ ; für alle Punkte im Abstände  $\delta$  von  $M$  gelten offenbar gleiche Bedingungen. Zwei zur Zylinderachse parallele Ebenen, die gegen  $MP$  um die Winkel  $\psi$  bzw.  $\psi + d\psi$  geneigt sind, werden vom Kreise  $\varrho$  in den Abständen  $g_1$  bzw.  $g_2$  geschnitten. Dann ist offenbar

$$(2) \quad \begin{cases} g_1 = +\sqrt{\varrho^2 - \delta^2 \cdot \sin^2 \psi} - \delta \cdot \cos \psi, \\ g_2 = +\sqrt{\varrho^2 - \delta^2 \cdot \sin^2 \psi} + \delta \cdot \cos \psi. \end{cases}$$

Aus dem doppelt keilförmigen Raume, den die Ebenen  $\psi$  bzw.  $\psi + d\psi$  bilden, ist in Abb. 1b eine Parallelebene zur Zylinderachse dargestellt,



die durch  $P$ ,  $T$  und  $S$  geht. Die einander parallelen Geraden  $S'U$  und  $T'V$  stellen die Schnitte der zur Zylinderachse parallelen Ebene mit dem Zylinder  $\varrho$  dar. Schließlich ist in Abb. 1b um  $P$  der Kreis mit der Reichweite  $R$  geschlagen.

Wir betrachten nun Elektronen, deren Bahnen unter verschiedenen Winkeln  $\varphi$  gegen die Parallele zu  $S'U$  oder  $T'V$  durch  $P$  in den Doppelkeil eintreten. Dabei zeigt sich: ist  $\varphi < \varphi_1$  bzw.  $\varphi < \varphi_2$ , so verläuft die ganze Bahn innerhalb  $\varrho$ ; ist aber  $\varphi > \varphi_1$  bzw.  $\varphi > \varphi_2$ , so ist nur der Weg  $w_1$  bzw.  $w_2$  der Elektronenbahn innerhalb  $\varrho$  an

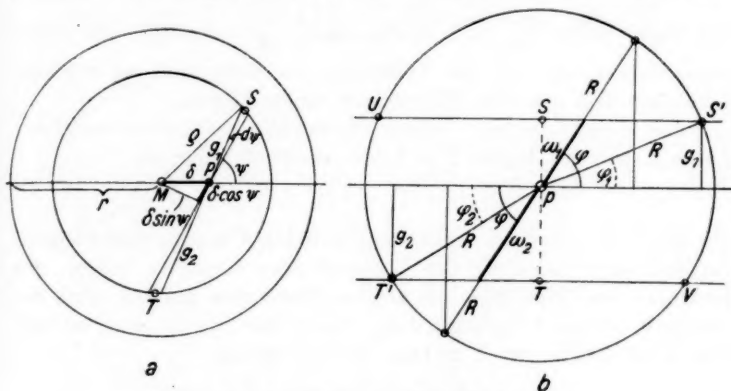


Abb. 1. Zur Integration des Bereichs  $0 \leq \delta \leq \varrho$

der Trägerbildung beteiligt. Wir haben also den Bereich von  $\varphi = 0$  bis  $\varphi = \varphi_1$  bzw.  $\varphi = \varphi_2$  und den Bereich von  $\varphi = \varphi_1$  bzw.  $\varphi = \varphi_2$  bis  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  gesondert zu behandeln. Es gilt nun offenbar für  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ :

$$(3) \quad \sin \varphi_1 = \frac{g_1}{R} \quad \text{und} \quad \sin \varphi_2 = \frac{g_2}{R}.$$

Und für die Wegstrecken  $w_1$  und  $w_2$  folgt:

$$(4) \quad w_1 = \frac{g_1}{\sin \varphi} \quad \text{und} \quad w_2 = \frac{g_2}{\sin \varphi}.$$

In den Raumwinkel zwischen  $\varphi$  und  $\varphi + d\varphi$  und zwischen  $\psi$  und  $\psi + d\psi$  tritt der Bruchteil

$$\frac{\sin \varphi \cdot d\varphi \cdot d\psi}{4\pi}$$

aller Elektronenbahnen. Zwischen zwei coaxialen Zylindern mit den Radien  $\delta$  und  $\delta + d\delta$  entstehen längs eines Strahlwegs von  $L$  cm in der Sekunde

$$L \cdot Z \cdot 2\pi \delta d\delta$$

Elektronenbahnen. Erzeugt jedes Primärelektron pro Zentimeter Bahnlänge  $s$  Träger (eines Vorzeichens), so entstehen längs seiner ganzen Bahn

$$R \cdot s$$

Träger, und längs seines Weges  $w$

$$w \cdot s$$

Träger.

Integrieren wir von  $\psi = 0$  bis  $\psi = \frac{\pi}{2}$ , und in jedem Teile des Doppelkeiles von  $\varphi = 0$  bis  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , so erstreckt sich unser Ergebnis nur über  $\frac{2}{8}$  der Vollkugel; um diese ganz zu erfassen, haben wir also mit dem Faktor 4 zu multiplizieren.

Die Gesamtzahl aller Träger, die das Röntgenstrahlenbündel der Länge  $L$  und des Radius  $r$  in 1 Sek. erzeugen kann, ist

$$r^2 \pi \cdot L \cdot Z \cdot R \cdot s.$$

Dividieren wir hierdurch unser von  $\delta = 0$  bis  $\delta = \varrho$  zu erstreckendes Integral, so erhalten wir den Bruchteil aller erzeugten Träger, der innerhalb des Zylinders  $\varrho$  von solchen Elektronen gebildet wird, die innerhalb  $\varrho$  ihren Ursprung haben. Dieser Bruchteil ist, entsprechend dem Vorstehenden, nach Kürzen gleicher Größen

$$(5) \left\{ \begin{aligned} p_1 &= \frac{2}{r^2 \pi} \cdot \int_{\delta=0}^{\delta=\varrho} \int_{\psi=0}^{\psi=\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \delta \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi d\psi d\delta \\ &+ \frac{2}{r^2 \pi} \cdot \int_{\delta=0}^{\delta=\varrho} \int_{\psi=0}^{\psi=\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \delta \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi d\psi d\delta \\ &+ \frac{2}{r^2 \cdot R \pi} \cdot \int_{\delta=0}^{\delta=\varrho} \int_{\psi=0}^{\psi=\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \delta \cdot [\sqrt{\varrho^2 - \delta^2 \cdot \sin^2 \psi} - \delta \cdot \cos \psi] \cdot d\varphi d\psi d\delta \\ &+ \frac{2}{r^2 \cdot R \pi} \cdot \int_{\delta=0}^{\delta=\varrho} \int_{\psi=0}^{\psi=\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=\varphi_2}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \delta \cdot [\sqrt{\varrho^2 - \delta^2 \cdot \sin^2 \psi} + \delta \cdot \cos \psi] \cdot d\varphi d\psi d\delta. \end{aligned} \right.$$

#### B. Ursprung der Elektronenbahnen zwischen $\varrho$ und $r$

Wir führen nun die Berechnung für solche Primärelektronen durch, die ihren Ursprung  $P$  zwischen  $\varrho$  und  $r$  haben und innerhalb  $\varrho$  Träger bilden. Wir haben hier, wie Abb. 2a zeigt, einen

entsprechenden räumlichen Keil zwischen  $\psi$  und  $\psi + d\psi$ , der vom Zylinder  $\rho$  bei  $K$  und  $L$  begrenzt wird. Dabei gilt offenbar:

$$(6) \quad \begin{cases} h_1 = \delta \cdot \cos \psi - \sqrt{\rho^2 - \delta^2 \cdot \sin^2 \psi}, \\ h_2 = \quad \quad \quad + \sqrt{\rho^2 - \delta^2 \cdot \sin^2 \psi}. \end{cases}$$

Wie Abb. 2b zeigt, ist hier immer nur ein Teil der ganzen Elektronenbahn wirksam; und zwar zwischen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  das Bahnende, zwischen  $\varphi_2$  und  $\pi/2$  ein mittlerer Teil der Bahn. Für diese Winkel gilt:

$$\sin \varphi_1 = \frac{h_1}{R} \quad \text{und} \quad \sin \varphi_2 = \frac{h_1 + 2h_2}{R},$$

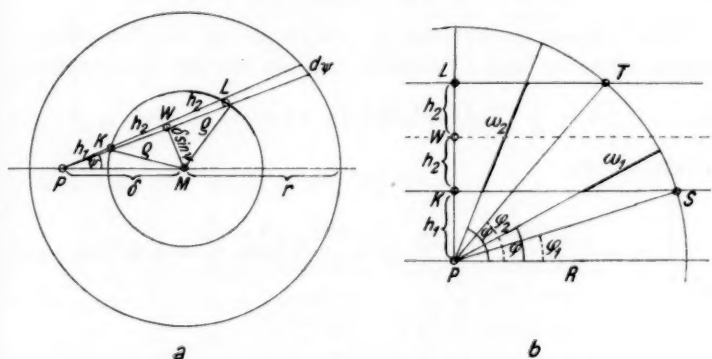


Abb. 2. Zur Integration des Bereichs  $\varrho \leq \delta \leq r$

oder unter Beachtung von (2):

$$(7) \quad \sin \varphi_1 = -\frac{g_1}{R} \quad \text{und} \quad \sin \varphi_2 = +\frac{g_2}{R}.$$

Für die wirksamen Bahnlängen folgt:

$$(8) \quad w_1 = R - \frac{h_1}{\sin \varphi} = R + \frac{g_1}{\sin \varphi} \quad \text{und} \quad w_2 = \frac{2h_2}{\sin \varphi}.$$

Schließlich müssen wir beachten, daß  $\psi$  hier nur von 0 bis zu einem Maximalwert läuft, der durch die Beziehung

$$(9) \quad \psi_{\max} = \arcsin \frac{q}{\delta}$$

bestimmt ist.

Unter Berücksichtigung der Ausführungen zum Bereiche  $A$  erhalten wir dann für den Bruchteil aller erzeugten Träger, der innerhalb des Zylinders  $\rho$  von solchen Primärelektronen gebildet wird, die zwischen  $\rho$  und  $r$  ihren Ursprung haben:

$$(10) \left\{ \begin{aligned} p_2 &= \frac{2}{r^2 \cdot R \pi} \cdot \int_{\delta=\varrho}^{\delta=r} \int_{\psi=0}^{\psi_{\max}} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \delta \cdot \{R \cdot \sin \varphi - \delta \cdot \cos \psi\} \cdot d\varphi d\psi d\delta \\ &+ \frac{2}{r^2 \cdot R \pi} \cdot \int_{\delta=\varrho}^{\delta=r} \int_{\psi=0}^{\psi_{\max}} \int_{\varphi_1}^{\pi/2} \delta \cdot \sqrt{\varrho^2 - \delta^2 \cdot \sin^2 \psi} \cdot d\varphi d\psi d\delta \\ &+ \frac{2}{r^2 \cdot R \pi} \cdot \int_{\delta=\varrho}^{\delta=r} \int_{\psi=0}^{\psi_{\max}} \int_{\varphi_2}^{\pi/2} \delta \cdot \sqrt{\varrho^2 - \delta^2 \cdot \sin^2 \psi} \cdot d\varphi d\psi d\delta. \end{aligned} \right.$$

## C. Die Integration

Wir müssen zuerst nach  $\varphi$  integrieren, da die Integrationsgrenzen wieder  $\psi$  und  $\delta$  enthalten. Setzen wir zur Abkürzung

$$(11) \quad a = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\varrho^2 - \delta^2 \cdot \sin^2 \psi}, \quad b = \frac{\delta}{R} \cdot \cos \psi,$$

so erhalten wir

$$(12) \left\{ \begin{aligned} p_1 &= \frac{2}{r^2 \pi} \cdot \int_{\delta=0}^{\delta=\varrho} \int_{\psi=0}^{\psi=\frac{\pi}{2}} \delta \cdot \{a \cdot \pi - a \cdot [\arcsin(a-b) + \arcsin(a+b)] \\ &+ b \cdot [\arcsin(a-b) - \arcsin(a+b)] \\ &+ 2 - \sqrt{1 - (a-b)^2} - \sqrt{1 - (a+b)^2}\} \cdot d\psi d\delta \end{aligned} \right.$$

und

$$(13) \left\{ \begin{aligned} p_2 &= \frac{2}{r^2 \pi} \cdot \int_{\delta=\varrho}^{\delta=r} \int_{\psi=0}^{\psi_{\max}} \delta \cdot \{a \cdot \pi - a \cdot [\arcsin(b-a) + \arcsin(b+a)] \\ &+ b \cdot [\arcsin(b-a) - \arcsin(b+a)] \\ &+ \sqrt{1 - (b-a)^2} - \sqrt{1 - (b+a)^2}\} \cdot d\psi d\delta. \end{aligned} \right.$$

Zur weiteren Integration schreiben wir für den ersten Summanden von (12)

$$\begin{aligned} &\frac{2}{r^2 \cdot R} \int_{\delta=0}^{\delta=\varrho} \int_{\psi=0}^{\psi=\frac{\pi}{2}} \delta \cdot \sqrt{\varrho^2 - \delta^2 \cdot \sin^2 \psi} \cdot d\psi d\delta \\ &= \frac{2\varrho^3}{r^2 \cdot R} \cdot \int_{\frac{\delta}{\varrho}=0}^{\frac{\delta}{\varrho}=1} \int_{\psi=0}^{\psi=\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\delta}{\varrho}\right) \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\varrho}\right)^2 \cdot \sin^2 \psi} \cdot d\psi \cdot d\left(\frac{\delta}{\varrho}\right). \end{aligned}$$

Hierin ist  $0 \leq \frac{\delta}{\varrho} \leq 1$ . Das Integral über  $\psi$  ist also das elliptische Normalintegral zweiter Gattung, und der erste Integrand von (12) wird

$$(14) \quad \frac{2\varrho^3}{r^2 \cdot R} \cdot \int_{\frac{\delta}{\varrho}=0}^{\frac{\delta}{\varrho}=1} \left(\frac{\delta}{\varrho}\right) \cdot E\left(\frac{\delta}{\varrho}\right) \cdot d\left(\frac{\delta}{\varrho}\right).$$

Entwicklung und Integration nach Gliedern liefert, für das Integral ohne den davorstehenden Faktor die Reihe

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{\delta}{\varrho}\right)^2 \cdot \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\delta}{\varrho}\right)^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\delta}{\varrho}\right)^4 \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\delta}{\varrho}\right)^6 - \dots \right] \\ & = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{\delta}{\varrho}\right)^2 \cdot \left[ 1 - A_1 \cdot \left(\frac{\delta}{\varrho}\right)^2 - A_2 \cdot \left(\frac{\delta}{\varrho}\right)^4 - A_3 \cdot \left(\frac{\delta}{\varrho}\right)^6 - \dots \right], \end{aligned} \right.$$

deren Koeffizienten die Werte haben:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{ll} A_1 = 0,125000, & A_6 = 0,000661, \\ A_2 = 0,015625, & A_7 = 0,000422, \\ A_3 = 0,004883, & A_8 = 0,000286, \\ A_4 = 0,002136, & A_9 = 0,000202, \\ A_5 = 0,001122, & A_{10} = 0,000148. \end{array} \right.$$

An der unteren Grenze wird das Integral also Null; für  $\frac{\delta}{\varrho} = 1$  hat die Reihe in der Klammer den Wert  $C = \frac{8}{3\pi}$ , der sich bei 10 Gliedern bereits bis auf einen Fehler von  $-0,81\%$  ergibt. Der Beweis für den Grenzwert  $C$  darf hier übergangen werden, weil sich  $C$ , wie wir im folgenden sehen werden, weghebt.

Somit wird der erste Summand von (12)

$$(17) \quad \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\varrho^3}{r^2 \cdot R} \cdot C.$$

Gehen wir beim ersten Summanden von (13) ebenso vor, so wird dieser unter Beachtung von (9)

$$(18) \quad \frac{2 \cdot \varrho^3}{r^2 \cdot R} \cdot \int_{\frac{\delta}{\varrho}=1}^{\frac{\delta}{\varrho}=\frac{r}{\varrho}} \int_{\psi=0}^{\psi=\arcsin \frac{\varrho}{\delta}} \left(\frac{\delta}{\varrho}\right) \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\varrho}\right)^2 \cdot \sin^2 \psi} \cdot d\psi \cdot d\left(\frac{\delta}{\varrho}\right).$$

Hier ist aber  $1 \leq \frac{\delta}{\varrho} \leq \frac{r}{\varrho}$ . Durch die Substitution

$$\sin \psi = x \cdot \frac{\varrho}{\delta}, \quad d\psi = \frac{\varrho}{\delta} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{\varrho}{\delta}\right)^2 \cdot x^2}}$$

geht (18) über in

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\frac{\delta}{\varrho} = \frac{r}{\varrho}}{\frac{\delta}{\varrho} = 1} \cdot \int_{x=0}^{x=1} \int_{\frac{\delta}{\varrho}}^{\frac{r}{\varrho}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\varrho}{\delta}\right)^2 \cdot x^2}} \cdot dx \cdot d\left(\frac{\delta}{\varrho}\right) \\ & = \frac{2\varrho^3}{r^2 \cdot R} \cdot \int_{\frac{\delta}{\varrho} = 1}^{\frac{\delta}{\varrho} = \frac{r}{\varrho}} \left[ 1 - \left(\frac{\delta}{\varrho}\right)^2 \right] \int_{x=0}^{x=1} \frac{dx \cdot d\left(\frac{\delta}{\varrho}\right)}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\varrho}{\delta}\right)^2 \cdot x^2}} \\ & + \frac{2\varrho^3}{r^2 \cdot R} \cdot \int_{\frac{\delta}{\varrho} = 1}^{\frac{\delta}{\varrho} = \frac{r}{\varrho}} \left(\frac{\delta}{\varrho}\right)^2 \int_{x=0}^{x=1} \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{\varrho}{\delta}\right)^2 \cdot x^2}{1-x^2}} \cdot dx \cdot d\left(\frac{\delta}{\varrho}\right). \end{aligned} \right.$$

Die Integrale über  $x$  sind die beiden elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung. Damit wird der erste Summand von (13)

$$(20) \quad \frac{2\varrho^3}{r^2 \cdot R} \cdot \int_{\frac{\delta}{\varrho} = 1}^{\frac{\delta}{\varrho} = \frac{r}{\varrho}} \left\{ K\left(\frac{\varrho}{\delta}\right) - \left(\frac{\delta}{\varrho}\right)^2 \cdot \left[ K\left(\frac{\varrho}{\delta}\right) - E\left(\frac{\varrho}{\delta}\right) \right] \right\} \cdot d\left(\frac{\delta}{\varrho}\right).$$

Indem wir wieder entwickeln, summieren und gliedweise integrieren, erhalten wir für (20) nach Einsetzen der Integrationsgrenzen:

$$(21) \quad \left\{ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\varrho^3}{r^2 \cdot R} \cdot \left\{ \frac{r}{\varrho} \cdot \left[ 1 - A_1 \cdot \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 - A_2 \cdot \left(\frac{\varrho}{r}\right)^4 - A_3 \cdot \left(\frac{\varrho}{r}\right)^6 - \dots \right] - C \right\}, \right.$$

wobei die Koeffizienten (16)  $A_1, A_2, \dots$  dieselben sind wie in (15) und  $C$  den oben angegebenen Wert besitzt. Indem wir (17) und (21) zusammenfassen, erhalten wir für die ersten Summanden von (12) und (13)

$$(22) \quad \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\varrho^3}{r \cdot R} \cdot \left[ 1 - A_1 \cdot \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 - A_2 \cdot \left(\frac{\varrho}{r}\right)^4 - A_3 \cdot \left(\frac{\varrho}{r}\right)^6 - \dots \right].$$



Um alle Summanden von (12), die den  $\arcsin$  enthalten, zu integrieren, entwickeln wir die  $\arcsin$  einzeln als Reihen und fassen Summanden, die gleiche Koeffizienten der  $\arcsin$ -Reihe enthalten, zusammen. Damit wird

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} & -a \cdot [\arcsin(a-b) + \arcsin(a+b)] \\ & + b \cdot [\arcsin(a-b) - \arcsin(a+b)] \\ & = -2 \{ T_1 \cdot (a^2 + b^2) + T_2 \cdot (a^4 + 6a^2b^2 + b^4) \\ & + T_3 \cdot (a^6 + 15a^4b^2 + 15a^2b^4 + b^6) \\ & + T_4 \cdot (a^8 + 28a^6b^2 + 70a^4b^4 + 28a^2b^6 + b^8) \\ & + T_5 \cdot (a^{10} + 45a^8b^2 + 210a^6b^4 + 210a^4b^6 + 45a^2b^8 + b^{10}) + \dots \} \end{aligned} \right.$$

wobei

$$T_1 = 1, \quad T_2 = \frac{1}{6}, \quad T_3 = \frac{3}{40}, \quad T_4 = \frac{5}{112}, \quad T_5 = \frac{35}{1152} \dots$$

die bekannten Koeffizienten der  $\arcsin$ -Reihe sind. Da  $a$  und  $b$  in (23) nur mit geradzahigen Exponenten auftreten, so haben die Integrale über die Einzelsummanden vermöge (11) die Form

$$\int_{\psi=0}^{\psi=\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} \psi \cdot \cos^{2n} \psi \cdot d\psi$$

und lassen sich dank der günstigen Grenzen sehr einfach lösen; jedes Einzelergebnis ist das Produkt aus  $\pi/2$  und einem Zahlenkoeffizienten. Die Integration von (23) nach  $\psi$  liefert damit

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} & -\pi \cdot \left\{ T_1 \cdot \left(\frac{e}{R}\right)^2 + T_2 \cdot \left[\left(\frac{e}{R}\right)^4 + 2 \cdot \left(\frac{e}{R}\right)^2 \cdot \left(\frac{\delta}{R}\right)^2\right] \right. \\ & + T_3 \cdot \left[\left(\frac{e}{R}\right)^6 + 6 \cdot \left(\frac{e}{R}\right)^4 \cdot \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{e}{R}\right)^2 \cdot \left(\frac{\delta}{R}\right)^4\right] \\ & + T_4 \cdot \left[\left(\frac{e}{R}\right)^8 + 12 \cdot \left(\frac{e}{R}\right)^6 \cdot \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 + 18 \cdot \left(\frac{e}{R}\right)^4 \cdot \left(\frac{\delta}{R}\right)^4 + 4 \cdot \left(\frac{e}{R}\right)^2 \cdot \left(\frac{\delta}{R}\right)^6\right] \\ & + T_5 \cdot \left[\left(\frac{e}{R}\right)^{10} + 20 \cdot \left(\frac{e}{R}\right)^8 \cdot \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 + 60 \cdot \left(\frac{e}{R}\right)^6 \cdot \left(\frac{\delta}{R}\right)^4 \right. \\ & \quad \left. + 40 \cdot \left(\frac{e}{R}\right)^4 \cdot \left(\frac{\delta}{R}\right)^6 + 5 \cdot \left(\frac{e}{R}\right)^2 \cdot \left(\frac{\delta}{R}\right)^8\right] + \dots \} \end{aligned} \right.$$

Gehen wir bei den  $\arcsin$ -Gliedern in (13) ebenso vor, so wird der Integrand für diese

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} & -4 \cdot \{ T_1 \cdot ab + T_2 \cdot (2a^3b + 2ab^3) + T_3 \cdot (3a^5b + 10a^3b^3 + 3ab^5) \\ & + T_4 \cdot (4a^7b + 28a^5b^3 + 28a^3b^5 + 4ab^7) \\ & + T_5 \cdot (5a^9b + 60a^7b^3 + 126a^5b^5 + 60a^3b^7 + 5ab^9) + \dots \} \end{aligned} \right.$$

Wenden wir die Substitution

$$\frac{\delta}{R} \cdot \sin \psi = x \quad dx = \frac{\delta}{R} \cdot \cos \psi \cdot d\psi = b \cdot d\psi$$

an, so erhalten wir, da hier  $a$  und  $b$  nur mit ungeraden Exponenten auftreten, vermöge (9) und (11) lauter Einzelintegrale der Form

$$\int_{x=0}^{x=\frac{\delta}{R}} x^{2m} \cdot \sqrt{\left(\frac{\delta}{R}\right)^2 - x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{\delta}{R}\right)^{2(m+1)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m} \cdot \frac{1}{2(m+1)},$$

die sich dank der günstigen Grenzen sehr einfach lösen lassen; die Integration nach  $\psi$  ergibt wiederum die Formel (24). Da zu den Integralen in (12) und (13) derselbe Faktor  $\frac{2\delta}{r^2\pi}$  tritt, so können wir nunmehr die arc sin-Glieder von (12) und (13) zusammenfassen und nach  $\delta$  von 0 bis  $r$  durchintegrieren. Das ergibt

$$(26) \left\{ \begin{aligned} & - \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \cdot \left\{ T_1 + T_2 \cdot \left[ 1 + \left(\frac{\delta}{r}\right)^2 \right] \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right. \\ & \quad + T_3 \cdot \left[ 1 + 3 \left(\frac{\delta}{r}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{r}\right)^4 \right] \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^4 \\ & \quad + T_4 \cdot \left[ 1 + 6 \left(\frac{\delta}{r}\right)^2 + 6 \left(\frac{\delta}{r}\right)^4 + \left(\frac{\delta}{r}\right)^6 \right] \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^6 \\ & \quad \left. + T_5 \cdot \left[ 1 + 10 \left(\frac{\delta}{r}\right)^2 + 20 \left(\frac{\delta}{r}\right)^4 + 10 \left(\frac{\delta}{r}\right)^6 + \left(\frac{\delta}{r}\right)^8 \right] \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^8 + \dots \right\}. \end{aligned} \right.$$

Wir haben nun noch die Wurzeln in (12) und (13) zu integrieren. Wir entwickeln wieder und erhalten für den entsprechenden Teil des Integranden von (12):

$$(27) \left\{ \begin{aligned} & 2 - \sqrt{1 - (a-b)^2} - \sqrt{1 - (a+b)^2} \\ & = + 2 \cdot \{ S_1 \cdot (a^2 + b^2) + S_2 \cdot (a^4 + 6a^2b^2 + b^4) \\ & \quad + S_3 \cdot (a^6 + 15a^4b^2 + 15a^2b^4 + b^6) \\ & \quad + S_4 \cdot (a^8 + 28a^6b^2 + 70a^4b^4 + 28a^2b^6 + b^8) \\ & \quad + S_5 \cdot (a^{10} + 45a^8b^2 + 210a^6b^4 + 210a^4b^6 + 45a^2b^8 + b^{10}) + \dots \}. \end{aligned} \right.$$

Und für den Integranden mit den Wurzeln in (13) wird:

$$(28) \left\{ \begin{aligned} & \sqrt{1 - (b-a)^2} - \sqrt{1 - (b+a)^2} \\ & = 4 \cdot \{ S_1 \cdot ab + S_2 \cdot (2a^3b + 2ab^3) + S_3 \cdot (3a^5b + 10a^3b^3 + 3ab^5) \\ & \quad + S_4 \cdot (4a^7b + 28a^5b^3 + 28a^3b^5 + 4ab^7) \\ & \quad + S_5 \cdot (5a^9b + 60a^7b^3 + 126a^5b^5 + 60a^3b^7 + 5ab^9) + \dots \}. \end{aligned} \right.$$

Dabei sind in (27) und (28)

$$S_1 = \frac{1}{2}, \quad S_2 = \frac{1}{8}, \quad S_3 = \frac{1}{16}, \quad S_4 = \frac{5}{128}, \quad S_5 = \frac{7}{256}$$

die bekannten Koeffizienten der Reihenentwicklung der Quadratwurzel. Vergleichen wir nun (27) mit (23) und (28) mit (25), so zeigt sich, daß Koeffizienten  $S$  und  $T$  mit demselben Index auch gleiche Klammern als Faktoren haben. Wir können also die Wurzelglieder mit den arc sin-Gliedern zusammenfassen. Setzen wir

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_1 - S_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 \\ T_2 - S_2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \\ T_3 - S_3 = \frac{3}{40} - \frac{1}{16} = \frac{1}{80} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{40} \\ T_4 - S_4 = \frac{5}{112} - \frac{5}{128} = \frac{5}{896} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{448} \\ T_5 - S_5 = \frac{35}{1152} - \frac{7}{256} = \frac{7}{2304} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{1152} \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

so erhalten wir mit Hilfe der Einzellösungen für den Bruchteil  $p_i$  aller gebildeten Träger, der innerhalb eines Zylinders mit dem Radius  $\varrho \leq r \leq \frac{R}{2}$  entsteht:

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_i = p_1 + p_2 \\ = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{r}{R}\right) \cdot \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 \cdot \left\{ \pi \cdot \left[ 1 - A_1 \cdot \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 - A_2 \cdot \left(\frac{\varrho}{r}\right)^4 - A_3 \cdot \left(\frac{\varrho}{r}\right)^6 - \dots \right] \right. \\ - \frac{r}{R} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{12} \cdot \left[ 1 + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 \right] \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{40} \cdot \left[ 1 + 3 \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^4 \right] \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^4 \right. \\ + \frac{5}{448} \cdot \left[ 1 + 6 \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 + 6 \left(\frac{\varrho}{r}\right)^4 + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^6 \right] \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^6 \\ \left. \left. + \frac{7}{1152} \cdot \left[ 1 + 10 \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 + 20 \left(\frac{\varrho}{r}\right)^4 + 10 \left(\frac{\varrho}{r}\right)^6 + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^8 \right] \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^8 + \dots \right] \right\} \end{array} \right.$$

## II. Bereich außerhalb des Röntgenstrahlenbündels

Das Ergebnis erhalten wir ohne Schwierigkeit im Anschluß an I, A; nur haben wir hier von  $\delta = 0$  bis  $\delta = r$  zu integrieren. Als Grenzbedingung gilt hier an Stelle von (1) offenbar

$$(31) \quad \varrho + r \leq R;$$

dies folgt aus (2) für den größten Weg  $g_2 = R$ , den ein vom Rande des Strahlenbündels ( $\psi = 0$  und  $\delta = r$ ) ausgehendes und die Zylinderachse senkrecht durchsetzendes Primärelektron zurücklegt. Es bleibt die Integration nach  $\varphi$  unter den alten Bedingungen und, da  $\frac{\delta}{\varrho} \leq 1$  ist, auch bei den arcsin und den Wurzeln die alte Integration

bestehen. Wir erhalten für das elliptische Normalintegral mit Hilfe von (15):

$$\begin{aligned} \frac{2\varrho^3}{r^2 \cdot R} \cdot \int_{\frac{\delta}{\varrho}=0}^{\frac{\delta}{\varrho}=\frac{r}{\varrho}} \left(\frac{\delta}{\varrho}\right) \cdot E\left(\frac{\delta}{\varrho}\right) \cdot d\left(\frac{\delta}{\varrho}\right) \\ = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{\varrho}{r} \cdot \left[1 - A_1 \cdot \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 - A_2 \cdot \left(\frac{r}{\varrho}\right)^4 - A_3 \cdot \left(\frac{r}{\varrho}\right)^6 - \dots\right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Für den arcsin und die Wurzeln zusammen folgt wegen derselben Integrationsgrenzen dasselbe Ergebnis wie bei I, A und I, B zusammen.

Damit erhalten wir für den Bruchteil  $p_a$  aller gebildeten Träger, der innerhalb eines Zylinders mit dem Radius  $\varrho$  im Bereiche  $r \leq \varrho \leq R - r$  entsteht

$$\begin{aligned} (32) \quad \left\{ p_a = \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{\varrho}{r} \cdot \left\{ \pi \cdot \left[ 1 - A_1 \cdot \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 - A_2 \cdot \left(\frac{r}{\varrho}\right)^4 - A_3 \cdot \left(\frac{r}{\varrho}\right)^6 - \dots \right] \right. \right. \\ \left. - \frac{r}{R} \cdot \frac{\varrho}{r} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{12} \cdot \left[ 1 + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 \right] \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{40} \cdot \left[ 1 + 3\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^4 \right] \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^4 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{5}{448} \cdot \left[ 1 + 6\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 + 6\left(\frac{\varrho}{r}\right)^4 + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^6 \right] \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^6 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{7}{1152} \cdot \left[ 1 + 10\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 + 20\left(\frac{\varrho}{r}\right)^4 + 10\left(\frac{\varrho}{r}\right)^6 + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^8 \right] \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^8 + \dots \right] \right\}. \end{aligned} \quad (36)$$

Am Rande des Röntgenstrahlenbündels ist  $\varrho = r$ ; hierfür wird offenbar  $p_i = p_a$ ; ein Sprung besteht hier also nicht.

### III. Differentiation von $p_i$ und $p_a$ nach $\varrho$

Die Differentiation der ersten Zeile von (30) nach  $\varrho$  gibt unter Berücksichtigung der den Koeffizienten  $A_1, A_2, \dots$  nach (16) zukommenden Werte

$$(33) \quad \pi \cdot \frac{\varrho}{r \cdot R} \cdot \left[ 1 - 2A_1 \cdot \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 - 3A_2 \cdot \left(\frac{\varrho}{r}\right)^4 - 4A_3 \cdot \left(\frac{\varrho}{r}\right)^6 - \dots \right] = \frac{2\varrho}{r \cdot R} \cdot E\left(\frac{\varrho}{r}\right).$$

Die Differentiation der ersten Zeile von (32) nach  $\varrho$  gibt

$$\begin{aligned} (34) \quad \left\{ \frac{\pi}{2R} \cdot \left[ 1 + A_1 \cdot \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 + 3A_2 \cdot \left(\frac{r}{\varrho}\right)^4 + 5A_3 \cdot \left(\frac{r}{\varrho}\right)^6 + \dots \right] \right. \\ \left. = \frac{2}{R} \cdot \left\{ K\left(\frac{r}{\varrho}\right) - \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 \cdot \left[ K\left(\frac{r}{\varrho}\right) - E\left(\frac{r}{\varrho}\right) \right] \right\} \right\}, \end{aligned}$$

was sich leicht durch die Reihenentwicklung der elliptischen Normalintegrale auf der rechten Seite beweisen läßt. Damit erhalten wir

$$(35) \left\{ \begin{aligned} \frac{dp_i}{d\varrho} &= \frac{1}{R} \cdot \frac{\varrho}{r} \cdot \left\{ 2E\left(\frac{\varrho}{r}\right) - \frac{r}{R} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{12} \cdot \left[ 1 + 2\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 \right] \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right. \right. \\ &\quad + \frac{1}{40} \cdot \left[ 1 + 6\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 + 3\left(\frac{\varrho}{r}\right)^4 \right] \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^4 \\ &\quad + \frac{5}{448} \cdot \left[ 1 + 12\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 + 18\left(\frac{\varrho}{r}\right)^4 + 4\left(\frac{\varrho}{r}\right)^6 \right] \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^6 \\ &\quad \left. \left. + \frac{7}{1152} \cdot \left[ 1 + 20\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 + 60\left(\frac{\varrho}{r}\right)^4 + 40\left(\frac{\varrho}{r}\right)^6 + 5\left(\frac{\varrho}{r}\right)^8 \right] \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^8 + \dots \right] \right\} \\ &= \frac{1}{R} \cdot g_i \left( \frac{r}{R}, \frac{\varrho}{r} \right), \end{aligned} \right.$$

und

$$(36) \left\{ \begin{aligned} \frac{dp_a}{d\varrho} &= \frac{1}{R} \cdot \left\{ 2 \left[ K\left(\frac{r}{\varrho}\right) - \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 \cdot \left[ K\left(\frac{r}{\varrho}\right) - E\left(\frac{r}{\varrho}\right) \right] \right] \right. \\ &\quad - \frac{\varrho}{r} \cdot \frac{r}{R} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{12} \cdot \left[ 1 + 2\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 \right] \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right. \\ &\quad + \frac{1}{40} \cdot \left[ 1 + 6\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 + 3\left(\frac{\varrho}{r}\right)^4 \right] \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^4 \\ &\quad + \frac{5}{448} \cdot \left[ 1 + 12\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 + 18\left(\frac{\varrho}{r}\right)^4 + 4\left(\frac{\varrho}{r}\right)^6 \right] \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^6 \\ &\quad \left. \left. + \frac{7}{1152} \cdot \left[ 1 + 20\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 + 60\left(\frac{\varrho}{r}\right)^4 + 40\left(\frac{\varrho}{r}\right)^6 + 5\left(\frac{\varrho}{r}\right)^8 \right] \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^8 + \dots \right] \right\} \\ &= \frac{1}{R} \cdot g_a \left( \frac{r}{R}, \frac{\varrho}{r} \right). \end{aligned} \right.$$

An der Grenze des Strahlenbündels, also für  $\varrho = r$ , wird sowohl  $E\left(\frac{\varrho}{r}\right)$  als auch  $K\left(\frac{r}{\varrho}\right) - \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 \cdot \left[ K\left(\frac{r}{\varrho}\right) - E\left(\frac{r}{\varrho}\right) \right]$  gleich 1. Die Gl. (33) und (34) haben dann denselben Wert, so daß am Rande des Strahlenbündels auch kein Sprung des Differentialquotienten auftritt.

#### IV. Der Bereich $R - r \leq \varrho \leq R + r$

Wie die geometrische Betrachtung lehrt, muß für diesen Bereich eine noch weitgehendere Unterteilung der Winkelgebiete vorgenommen werden. Das hat das Auftreten von noch mehr Integralen zur Folge. Einfacher gestaltet sich der Sonderfall  $\varrho = R$ . Die Durchführung der Rechnung ist indessen nicht lohnend, wenn man bedenkt, daß außerhalb  $\varrho = R + r$  keine Trägerbildung mehr stattfinden kann und  $p_a$  hier den Wert 1 annehmen muß. Im allgemeinen kommt man, wie wir sehen werden, bei der rechnerischen Auswertung des Bereiches  $0 \leq \varrho \leq R - r$  bereits so nahe an den Endwert 1 heran, daß eine graphische Interpolation zwischen  $R - r$  und  $R + r$  völlig ausreicht. Es wurde daher auf die Durchführung der Rechnung zwischen  $R - r$  und  $R + r$  verzichtet.

## V. Die Tabulierung der Reihen in (30), (32) und (36)

## 1. Die Tabulierung der Reihe

$$1 - A_1 \cdot x^2 - A_2 \cdot x^4 - A_3 \cdot x^6 - \dots$$

läßt sich leicht mit Hilfe der Koeffizienten (16) durchführen. Dies geschah in Tab. 1. Für (30) kann man hiernach die Werte von  $x = \frac{\varrho}{r}$  und für (32) die Werte  $x = \frac{r}{\varrho}$  durch graphische Interpolation entnehmen.

Tabelle 1  
Tabulierung der Reihe in (30) und (32)

$x$	$1 - A_1 x^2 - A_2 x^4 - \dots$
0,0	1,00000
0,1	0,99875
0,2	0,99498
0,3	0,98862
0,4	0,97958
0,5	0,96769
0,6	0,95270
0,7	0,93426
0,8	0,91177
0,9	0,88426
1,0	$0,84883 = \frac{8}{3\pi}$

## 2. Die Tabulierung von

$$K\left(\frac{r}{\varrho}\right) - \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 \cdot \left[K\left(\frac{r}{\varrho}\right) - E\left(\frac{r}{\varrho}\right)\right] = f\left(\frac{r}{\varrho}\right)$$

in (36) führt man für sehr kleine Werte von  $r/\varrho$  am besten mit der linken Seite, für größere Werte von  $r/\varrho$  am besten nach der rechten Seite von (34) durch. Hierbei wurden die Tafeln der elliptischen Normalintegrale von Kiepert<sup>6)</sup> benutzt, die 5 Stellen hinter dem Komma haben und damit um eine Dezimale weiter gehen als die von Jahnke-Emde<sup>7)</sup>. Entsprechend diesen Tabellen ist noch das zur Berechnung verwandte  $\alpha$  mitgeteilt, wobei  $\sin \alpha = \frac{r}{\varrho}$  gesetzt wurde. Die berechnete Funktion  $f\left(\frac{r}{\varrho}\right)$  fällt in der Umgebung von  $\frac{r}{\varrho} = 1$  schnell ab und konvergiert gut gegen ihren Grenzwert  $\pi/4$ , den sie für  $\frac{r}{\varrho} = \frac{1}{4}$  schon auf 1% erreicht hat. Für die weiteren Berechnungen erforderliche Zwischenwerte wurden durch graphische Interpolation gewonnen.



Tabelle 2  
 Tabulierung der Funktion  $f\left(\frac{r}{\varrho}\right)$  in (36)

$\frac{\varrho}{r}$	$f\left(\frac{r}{\varrho}\right)$	$\frac{r}{\varrho}$	$\alpha^\circ$
1,000000	1,00000	1,000000	90° 0'
1,000006	0,99997	0,999994	89° 48'
1,000025	0,99988	0,999975	89° 36'
1,00005	0,99976	0,99995	89° 24'
1,00015	0,99940	0,99985	89°
1,00061	0,99802	0,99939	88°
1,0014	0,99610	0,9986	87°
1,0038	0,99108	0,9962	85°
1,015	0,97438	0,9848	80°
1,064	0,93476	0,9397	70°
1,155	0,89591	0,8660	60°
1,305	0,86190	0,7660	50°
1,556	0,83409	0,6428	40°
2,000	0,81259	0,5000	30°
2,923	0,79739	0,3420	20°
3,862	0,79219	0,2588	15°
5,755	0,78856	0,1736	10°
8,200	0,78688	0,1219	7°
11,47	0,78657	0,0872	5°
20	0,78567	0,050000	
50	0,78544	0,020000	
100	0,78541	0,010000	
$\infty$	$0,78540 = \frac{\pi}{4}$	0,000000	

#### VI. Die Darstellung der Integralkurven

In den Gl. (30) für  $p_i$  und (32) für  $p_a$  treten nur die Verhältnisse  $r/R$  und  $\varrho/r$  auf.

Ist eine Strahlung bestimmter Härte und damit bestimmter Reichweite  $R$  der Primärelektronen gegeben, so kann man  $R$  als Einheit wählen und  $r$  und  $\varrho$  als Bruchteile derselben ausdrücken, wie das in Abb. 3 in zwei verschiedenen Maßstäben geschehen ist. Dabei zeigt sich nun, daß sich für jeden von Null verschiedenen Radius  $r$  des Röntgenstrahlenbündels die Integralkurven offenbar um so besser der Grenzkurve für  $r = 0$  anschmiegen, je kleiner  $r$  ist. Diese Grenzkurve erhält man leicht, wenn man in (32) zunächst das  $r$  kürzt und es dann gleich Null setzt. Indem man bei den dann übrig bleibenden Gliedern die Koeffizienten wieder gemäß (29) in  $T$  und  $S$  zerlegt, erhält man für die Grenzkurve

$$(37) \quad p_a|_{r=0} = \frac{\varrho}{R} \cdot \arccos \frac{\varrho}{R} + 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\varrho}{R}\right)^2}.$$

Das ist aber die in der Untersuchung (I) den Integralkurven zugrunde gelegte Gl. (1). Am stärksten tritt der Unterschied zwischen

der Grenzkurve für  $r = 0$  und den wirklichen Integralkurven für  $r > 0$  innerhalb des Röntgenstrahlenbündels hervor: hier sinken die letzteren mit abnehmendem  $\varrho$  mehr und mehr unter die Grenzkurve und berühren für  $\varrho = 0$  die Abszissenachse, während diese von der Grenzkurve unter einem Winkel geschnitten wird. Je kleiner aber  $r$  gegen  $R$  ist, desto weniger fällt der Unterschied ins Gewicht. Dieser Umstand rechtfertigt unsere direkte Fortführung der Integralkurven nach dem Nullpunkt, wie sie in der Untersuchung (I) durchgeführt wurde.

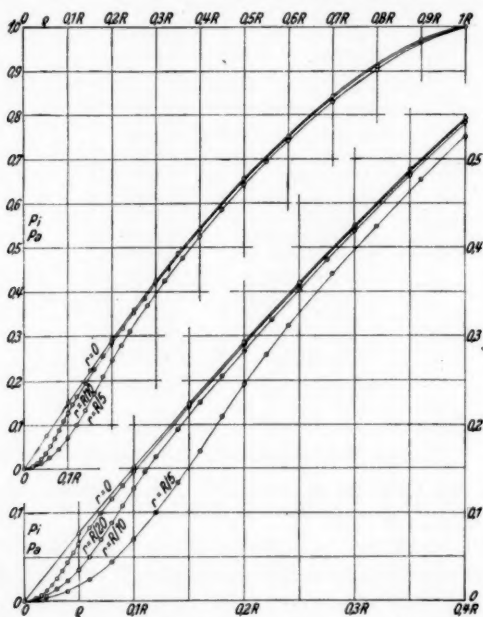


Abb. 3. Integralkurven für verschiedene  $r$  als Bruchteile derselben Reichweite  $R$ , sowie Grenzkurve für  $r = 0$

Vergleicht man Strahlungen verschiedener Härte und daher verschiedener Reichweite  $R$  miteinander, so kann man  $r$  als Einheit wählen und  $R$  und  $\varrho$  als Vielfache (oder als Bruchteil) von  $r$  ausdrücken (Abb. 4). Diese Darstellung rechtfertigt noch deutlicher das in der Arbeit (I) angewandte Vorgehen: im Hinblick darauf, daß es sich um ein graphisches Verfahren handelt, ist die Abweichung der wahren Integralkurven von den durch den Nullpunkt extrapolierten Grenzkurven so gering, daß sie kaum ins Gewicht fallen dürfte. Demgegenüber lassen die Integralkurven der Abb. 4 aber sehr eindrucksvoll den Tatbestand erkennen, daß die Integralkurven von der

Umgebung des Nullpunktes aus um so steiler ansteigen und um so eher ihren Höchstwert erreichen, je kleiner die Reichweite  $R$ , je

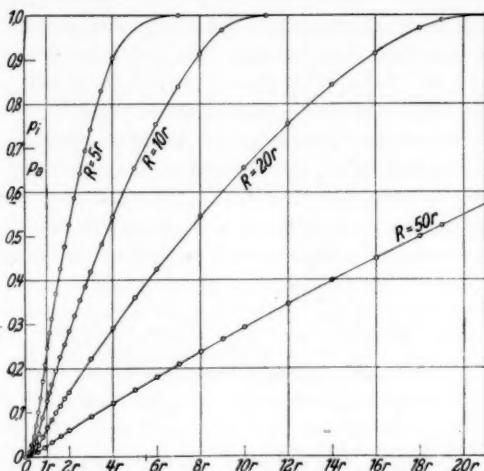


Abb. 4. Integralkurven für  $r = 1$  und für verschiedene Reichweiten  $R$  als Vielfache von  $r$

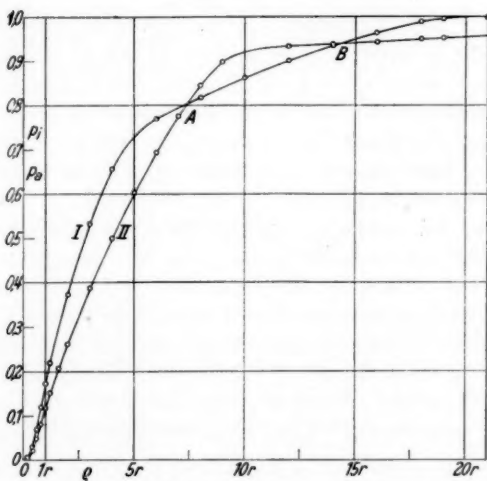


Abb. 5. Integralkurven für eine weiche (I) und eine harte (II) Röntgenstrahlung bei entsprechendem Anteil der Photoelektronen und der Comptonelektronen gemäß Tab. 3

weicher also die Strahlung ist. Gerade dieser Umstand bildete eine der Grundlagen der Untersuchung (I).

Dieser Tatbestand legt es nahe, zu prüfen, was sich ergibt, wenn man dem Umstand Rechnung trägt, daß in Wirklichkeit kurzbahnige Comptonelektronen und langbahnige Photoelektronen gleichzeitig vorhanden sind. Es sind demgemäß in Abb. 5 zwei Integralkurven dargestellt, die für zwei Röntgenstrahlungen verschiedener Härte gelten. Dabei wurde angenommen, bei den Strahlungen *I* und *II* verteile sich der Anteil an der gesamten Trägerbildung und die Reichweite entsprechend Tab. 3 auf Comptonelektronen und Photoelektronen. Die hiermit berechneten Integralkurven zeigen nun folgendes: wiederum steigt die Kurve für die weichere Strahlung *I*

Tabelle 3

Beispiel für den Anteil der Compton- und Photoelektronen an der Gesamtionisation sowie für deren Reichweiten als Grundlage für Abb. 5

Strahlung	Anteil an der Gesamtionisation bei den		Reichweiten <i>R</i> (als Vielfaches von <i>r</i> ) bei den	
	Comptonelekt. in %	Photoelekt. in %	Comptonelekt. in %	Photoelekt. in %
<i>I</i> weich	60	40	5	20
<i>II</i> hart	90	10	10	50

zunächst steiler an. Außerhalb von  $6r$  sind aber keine Comptonelektronen mehr wirksam: hier neigt sich die Kurve und strebt nun ganz allmählich dem Werte 1 zu, den sie bei  $21r$  erreicht, über welche Entfernung hinaus auch keine Photoelektronen mehr gelangen. Bei der härteren Strahlung *II* reichen die Comptonelektronen bis  $11r$ : hier biegt die Kurve *II* um und strebt dem Werte 1 zu, den sie (außerhalb der Zeichnung) bei  $51r$  erreichen würde\*).

Dieser Befund bestätigt die folgenden Punkte, die als Grundlagen der Untersuchung I dienen:

1. Die Integralkurve der weicheren Strahlung *I* steigt vom Nullpunkte aus steiler an als die der härteren Strahlung *II*;
2. Die Integralkurve der weicheren Strahlung *I* sinkt in einem Schnittpunkte *A* unter die der härteren Strahlung *II*;
3. Die Integralkurve der weicheren Strahlung *I* steigt in einem zweiten Schnittpunkte *B* über die der härteren Strahlung *II* wieder empor;

\*) Die Entfernungen, in der eine Elektronenart aufhört, zu ionisieren, ergeben sich nach dem unter IV Gesagten zu  $\frac{(R+r)}{r} = \frac{R}{r} + 1$ .

4. Die Integralkurve der weicheren Strahlung  $I$  verläuft von da ab über der der härteren Strahlung  $II$  und erreicht den Wert 1 eher als letztere.

Demgegenüber weichen die berechneten Integralkurven in einem wesentlichen Punkte von den experimentell gewonnenen ab: die berechneten Kurven zeigen keine Wendepunkte. Eine Integralkurve hat aber dort einen Wendepunkt, wo ihre Differentialkurve ein Extremum besitzt. Daß unsere berechneten Differentialkurven außerhalb des Röntgenstrahlenbündels aber kein Maximum aufweisen können, ist dem Umstande zuzuschreiben, daß wir, wie wir schon betonten, einerseits die Zahl  $s$  der Träger pro Zentimeter Bahnlänge des Primärelektrons als konstant ansahen, und andererseits mit bis ans Ende geradlinigen Elektronenbahnen rechneten. Die Trägerwolke muß daher mit wachsendem  $\varrho$  monoton abnehmen. In Wirklichkeit nimmt demgegenüber sowohl  $s$  als auch die Bahnkrümmung vom Ursprung an mehr und mehr zu und bewirkt dadurch das Maximum der Trägerwolke, welcher Vorgang bereits sehr eingehend in der Untersuchung I besprochen wurde. Da unsere Rechnung, wegen unserer vereinfachenden Annahmen, also kein Maximum der Differentialkurve liefert, so kann sich auch kein Minimum ergeben, das nur aus der Überlagerung der abfallenden Differentialkurve für die Comptonträger und aus der zu einem Maximum ansteigenden Differentialkurve für die Phototräger entsteht. Das Fehlen der Wendepunkte in unseren berechneten Integralkurven ist also nur durch unsere vereinfachenden Annahmen verursacht.

#### VII. Die Darstellung der Differentialkurven

In den Gl. (35) für  $dp_i/d\varrho$  und (36) für  $dp_a/d\varrho$  tritt außer den Verhältnissen  $r/R$  und  $\varrho/r$  auch noch  $R$  allein auf.

Ist die Härte einer Strahlung und damit die Reichweite  $R$  gegeben und wählen wir  $R$  als Einheit, so können wir in (35) und (36) das  $R$  im Nenner vor der geschweiften Klammer gleich 1 setzen. Wir können dann  $\varrho$  und  $r$  wieder als Bruchteile von  $R$  ausdrücken und  $dp_i/d\varrho$  bzw.  $dp_a/d\varrho$  als Ordinaten auftragen. Wir erhalten so die Kurven der Abb. 6. Die Grenzkurve für  $r = 0$  gewinnen wir entweder, indem wir (37) nach  $\varrho$  differenzieren, oder, indem wir in (36) das  $r$  kürzen und dann  $r = 0$  setzen. Dabei wird nach Tab. 2 oder nach (34) der erste Summand in der geschweiften Klammer  $\pi/2$ ; die übrigen Summanden liefern die Reihe für  $-\arcsin \frac{\varrho}{R}$ , so daß wir auf beiden Wegen für die Grenzkurve das Ergebnis erhalten

$$(38) \quad \left. \frac{dp_a}{d\varrho} \right|_{r=0} = \frac{1}{R} \cdot \arccos \frac{\varrho}{R}.$$

Es ist dies die Differentialkurve, die in der Untersuchung I der graphisch gewonnenen Differentialkurve entspricht.

Wie man erkennt, schmiegen sich die für ein Strahlenbündel vom Radius  $r$  berechneten Differentialkurven in einigem Abstände vom Strahlenbündel der Grenzkurve befriedigend an. Indessen findet sich an seiner Grenze und in seinem Innern eine auffällige Erscheinung: dicht außerhalb des Röntgenstrahlenbündels steigt jede der Differentialkurven über die Grenzkurve empor, erreicht im Innern

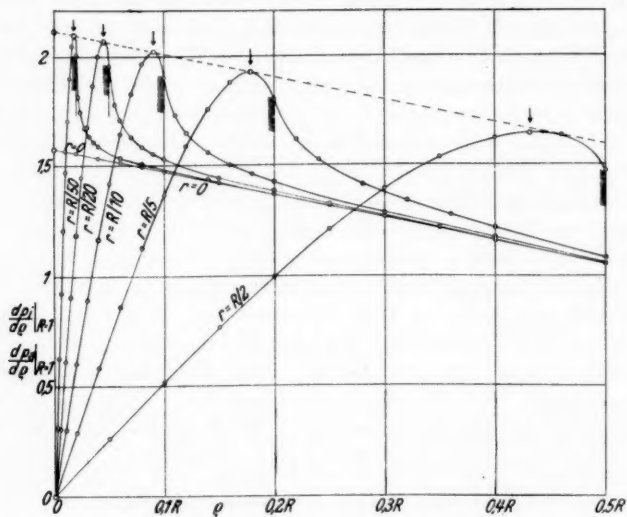


Abb. 6. Differentialkurven für verschiedene  $r$  als Bruchteile derselben Reichweite  $R$ , sowie Grenzkurve für  $r = 0$

des Bündels kurz hinter seiner Begrenzung ein Maximum und fällt dann zum Nullpunkt ab, den sie unter einem um so größeren Neigungswinkel gegen die Abszissenachse schneidet, je kleiner  $r$  ist.

Es soll nun die Lage dieser Maxima und ihr Ordinatenwert bestimmt werden. Hierzu setzen wir den Differentialquotienten von (35) nach  $\varrho$  gleich Null. Differenzieren des ersten Summanden von (35) gibt

$$\frac{d}{d\varrho} \left[ \frac{2\varrho}{rR} \cdot E\left(\frac{\varrho}{r}\right) \right] = \frac{2}{r \cdot R} \cdot \left[ E\left(\frac{\varrho}{r}\right) + \varrho \cdot \frac{d}{d\varrho} E\left(\frac{\varrho}{r}\right) \right].$$

Entwickeln wir jeden der Summanden in der eckigen Klammer rechts, und ziehen wir den zweiten vom ersten ab, so folgt

$$E\left(\frac{\varrho}{r}\right) - \varrho \cdot \frac{d}{d\varrho} E\left(\frac{\varrho}{r}\right) = K\left(\frac{\varrho}{r}\right).$$



Einsetzen in die vorhergehende Gleichung liefert

$$(39) \quad \frac{d}{dq} \left[ \frac{2q}{rR} \cdot E\left(\frac{q}{r}\right) \right] = \frac{2}{rR} \cdot \left[ 2 \cdot E\left(\frac{q}{r}\right) - K\left(\frac{q}{r}\right) \right].$$

Differenzieren wir auch die übrigen Glieder, und multiplizieren wir mit  $rR/2$ , so erhalten wir

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} & 2 \cdot E\left(\frac{q}{r}\right) - K\left(\frac{q}{r}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{R} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] \\ & - \frac{1}{4} \left(\frac{r}{R}\right)^3 \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^2 - \dots = 0. \end{aligned} \right.$$

Indem wir nun für jedes vorgegebene  $r/R$  einzeln durch sukzessive Approximation ein zugehöriges  $q/r$  finden, das (40) genügt, erhalten wir die Lage der Maxima und nach Einsetzen in (35) deren Höhe. Die Ergebnisse zeigt Tab. 4.

Tabelle 4

Lage und Höhe der Maxima im Innern des Bündels bei der Differentialkurve

$r$	$R/2$	$R/5$	$R/10$	$R/20$	$R/50$	0
$\frac{q}{r} \Big _{\max}$	0,8635	0,8940	0,9019	0,9055	0,9075	0,9093
$\frac{dp_i}{dq} \Big _{\max}$	1,6422	1,9277	2,0187	2,0644	2,0914	2,1098

Eigenartig ist dabei der Befund, daß auch beim Grenzübergang  $r \rightarrow 0$  die Grenzkurve, die für  $q = 0$  nach (38) die Ordinatenachse beim Werte  $\pi/2$  trifft, auf dieser selbst noch bis zum Werte 2,1098 ansteigt und dann auf ihr zu Null abfällt. Es ist dies vielleicht ein Analogon zur Gibbschen Erscheinung bei der Fourieranalyse.

Sollen die Differentialkurven für Strahlungen verschiedener Härte und daher verschiedener Reichweite  $R$  bei gleichem Radius  $r$  des Röntgenstrahlenbündels miteinander verglichen werden, so kann  $r$  als Einheit dienen und  $R$  und  $q$  können als Vielfache (oder als Bruchteil) von  $r$  dargestellt werden. Dazu müssen aber (35) und (36) noch mit der Einheit  $r$  multipliziert werden. In (35) und (36) steht dann der Bruch  $r/R$  vor  $g$ , und beide Gleichungen enthalten dann wiederum nur noch die Verhältnisse  $r/R$  und  $q/r$ .

Diese Darstellung zeigt Abb. 7. Die ausgezogenen Differentialkurven gelten für den Bündelradius  $r = 1$ . Die punktierten Kurven sind die Grenzkurven für  $r = 0$  nach (38), die den Differentialkurven der Untersuchung I entsprechen; für jede punktierte Kurve wurde auch der Ordinatengrenzwert für  $r \rightarrow 0$  dargestellt.

Für die Neigung der Grenzkurve im Nullpunkt erhalten wir durch Differenzieren von (38):

$$(41) \quad \frac{d}{dq} \left[ \frac{1}{R} \cdot \arccos \frac{q}{R} \right] = - \frac{1}{R^2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{q}{R}\right)^2}} \Big|_{q=0} = - \frac{1}{R^2} = \tan \chi_0.$$

Je kleiner  $R$ , je weicher also die Röntgenstrahlen, desto steiler ist die Tangente an die Grenzkurve in der Ordinatenachse nach unten

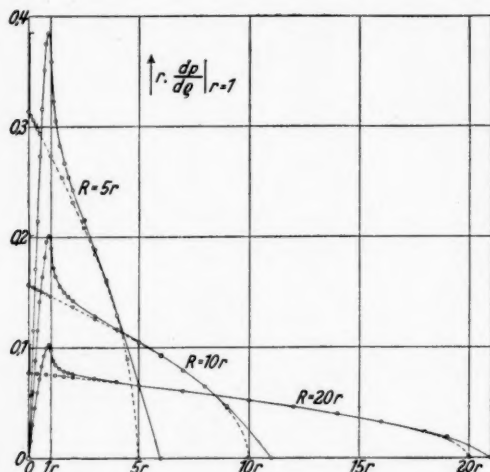


Abb. 7. Differentialkurven für  $r = 1$  und für verschiedene Reichweiten  $R$  als Vielfache von  $r$ , sowie Grenzkurven für  $r = 0$

geneigt. Das zeigt auch Abb. 7. Sehr deutlich wird durch die vorstehende Rechnung der Verlauf der Kurven in den Abb. 9 und 10 der Untersuchung I für die Wolken der Comptonträger bestätigt, nämlich:

1. Je härter die Strahlung und je größer daher die Reichweite  $R$  ist, desto niedrigere Werte hat die Ordinate in der Ordinatenachse und in deren Umgebung;
2. desto geringere Neigung weist die Kurve in der Ordinatenachse und in deren Umgebung auf;
3. desto weiter erstreckt sich die Kurve, bis sie Null wird; und
4. Die Differentialkurven verschiedener Reichweite  $R$  überschneiden sich gegenseitig, und die Schnittpunkte verschieben sich systematisch im gleichen Sinne wie bei den Beobachtungen in I.

## VIII. Die Dichtekurven

1. Die relative Dichte  $\frac{1}{2\pi\varrho} \cdot \frac{dp}{d\varrho}$ 

Dividieren wir (35) und (36) durch  $2\pi\varrho$ , so erhalten wir die „relative Dichte“, nämlich die Zahl der Träger, die in  $1\text{ cm}^3$  im Abstände  $\varrho$  von der Achse gebildet werden, dividiert durch die Zahl aller Träger, die das zylindrische Röntgenstrahlenbündel vom Radius  $r$  und  $1\text{ cm}$  Länge erzeugt. Dabei zeigt eine einfache Überlegung, daß die Länge des Röntgenstrahlenbündels nicht in das Ergebnis eingehen kann, wenn es nur als hinreichend lang angesehen wird. Es werden nämlich zwar die Träger, die durch die Elektronenemission aus jedem Zentimeter Länge des Röntgenstrahlenbündels im Abstände  $\varrho$  vom Bündel innerhalb einer Röhre entstehen, die  $1\text{ cm}^2$  Querschnitt hat und dem Strahlenbündel parallel läuft, über ein Stück dieser Röhre verteilt sein, wobei die Länge, über die sich diese Verteilung erstreckt, von der Reichweite  $R$  der Elektronen abhängt; aber jedes Zentimeter Länge des Röntgenstrahlenbündels liefert eine solche Verteilung innerhalb der Röhre, und die einzelnen Verteilungen überlagern sich gegenseitig. Bei hinreichender Länge des Strahlenbündels kommt es also auf dasselbe hinaus, als wären alle Träger, die ein  $1\text{ cm}$  langes Stück des Röntgenstrahlenbündels überhaupt in der Röhre erzeugt, in dem diesem Zentimeter zugehörigen,  $1\text{ cm}$  langen Stück der Röhre konzentriert. Es ist also ebenso, als erzeugte jedes Zentimeter Röntgenstrahlänge alle Träger im Volumen  $1\text{ cm}^3$  und im Abstände von  $\varrho\text{ cm}$  selbst, während in Wirklichkeit ein äquivalenter Austausch stattfindet.

Ist die Härte der Röntgenstrahlen und damit die Reichweite  $R$  gegeben, so können wir wieder  $R$  als Einheit wählen. Damit nur die Verhältnisse  $r/R$  und  $\varrho/r$  in den Gleichungen auftreten, multiplizieren wir mit  $R^2$  und drücken  $r$  und  $\varrho$  als Bruchteile von  $R$  aus. Die Darstellung in Abb. 8 zeigt nun sehr deutlich das, worauf schon in der Einleitung hingewiesen wurde: die Größe des Radius  $r$  des Röntgenstrahlenbündels beeinflusst die relative Dichte in der Nähe der Achse des Bündels ganz grundlegend; eine willkürliche Annahme über  $r$  ist hier nicht mehr zulässig. Je kleiner wir  $r$  annehmen, desto größer wird die Dichte in der Nähe der Achse; und wird  $r = 0$ , so erhalten wir die punktierte Grenzkurve. Sie ergibt sich mit Hilfe von (36) und (38) zu

$$(42) \quad \frac{R^2}{2\pi\varrho} \cdot \frac{dp_a}{d\varrho} \bigg|_{\substack{R=1 \\ r=0}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{R}{\varrho} \cdot \arccos \frac{\varrho}{R} \bigg|_{R=1}.$$

In einigem Abstände vom Röntgenstrahlenbündel schmiegen sich alle Kurven der Grenzkurve gut an: wie schon in der Einleitung

betont wurde, ergibt sich dort die relative Dichte richtig und zwar unabhängig von der Annahme über den Bündelradius  $r$ . Daß die

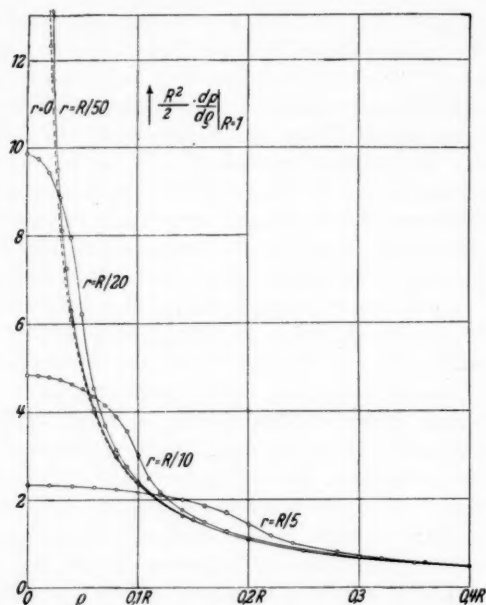


Abb. 8. Relative Trägerdichte für verschiedene  $r$  als Bruchteile derselben Reichweite  $R$ , sowie Grenzkurve für  $r = 0$

relative Dichte aber in der Nähe der Achse für  $r = 0$  unendlich groß wird, folgt aus der Annahme einer „relativen Dichte“: da wir uns dabei auf gleiche Ionisation und damit auf gleichviel gebildete Primärelektronen beziehen, so muß mit abnehmendem  $r$  die Zahl ihrer Ursprungspunkte pro Kubikzentimeter umgekehrt proportional dem Quadrate von  $r$  zunehmen.

Für Strahlen verschiedener Härte und damit verschiedener Reichweite  $R$ , aber bei gleichem Radius  $r$  des Strahlenbündels, können wir wieder  $r$  als Einheit ansehen und  $R$  und  $\varrho$  als Vielfache (oder als Bruchteile) von  $r$  ausdrücken. Wir dürfen dann, damit nur die Verhältnisse  $r/R$  und  $\varrho/r$  in den Gleichungen auftreten, mit  $r^2$  multiplizieren und erhalten so die Abb. 9. Hier nimmt die relative Dichte, ebenso wie die Höhe der Differentialkurven in Abb. 7, in der Umgebung der Bündelachse mit steigendem  $R$  ab, und die auch bei den Differentialkurven festgestellte Überschneidung

der Kurven für verschiedene Reichweiten  $R$  wird besonders bei dem vergrößerten Maßstabe in Abb. 9b deutlich.

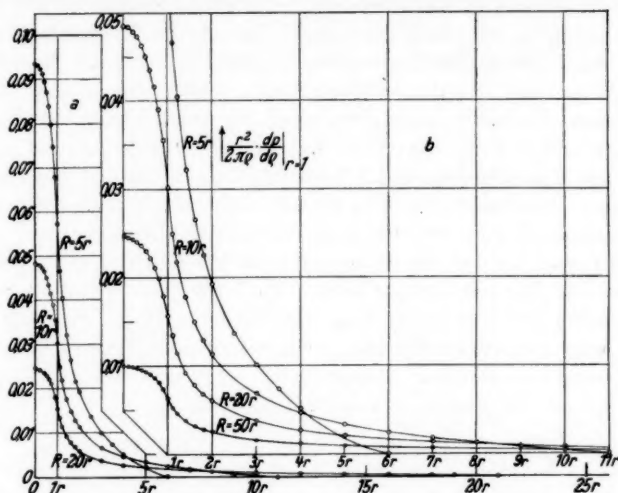


Abb. 9. Relative Trägerdichte für  $r = 1$  und für verschiedene Reichweiten  $R$  als Vielfaches von  $r$ ; bei Multiplikation der Ordinatenwerte mit  $\pi$  erhält man die absolute Trägerdichte

$$2. \text{ Die absolute Dichte } D = \frac{r^2 \cdot R}{2q} \cdot Z \cdot s \cdot \frac{dp}{dq}$$

Um die absolute Dichte aus den Gl. (35) und (36) zu erhalten, haben wir diese nicht allein durch  $2\pi q$  zu dividieren, sondern wir müssen sie auch noch mit dem Faktor  $r^2 \pi \cdot R \cdot L \cdot Z \cdot s$  für  $L = 1$  cm, d. h. mit der Gesamtzahl aller Träger multiplizieren, die das Röntgenstrahlenbündel vom Radius  $r$  und 1 cm Länge pro Sekunde erzeugt. Zu den Gl. (35) und (36) tritt also der Faktor  $\frac{r^2 \cdot R}{2q} \cdot Z \cdot s$ . Damit erhalten wir für die absolute Dichte innerhalb und außerhalb des Röntgenstrahlenbündels

$$(43) \quad D_i = \frac{r^2 \cdot R}{2q} \cdot Z \cdot s \cdot \frac{dp_i}{dq} = \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{r}{q} \cdot g_i \left( \frac{r}{R}, \frac{q}{r} \right) \cdot [R \cdot Z \cdot s],$$

$$(44) \quad D_a = \frac{r^2 \cdot R}{2q} \cdot Z \cdot s \cdot \frac{dp_a}{dq} = \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{r}{q} \cdot g_a \left( \frac{r}{R}, \frac{q}{r} \right) \cdot [R \cdot Z \cdot s].$$

Da  $Z$  die Zahl der Primärelektronen pro Kubikzentimeter und pro Sekunde,  $s$  die Zahl der Träger pro Zentimeter Elektronenbahnlänge ist, da  $q$ ,  $r$  und  $R$  die Dimension einer Länge haben und da  $q/r$  und  $r/R$  Verhältniszahlen sind, so besitzen die Gl. (43) und (44) die

Dimension einer Zahl pro Volumen und pro Sekunde, was mit der Definition der Trägerdichte im Sättigungsstrom übereinstimmt.

Nach unserer in der Einleitung gegebenen Definition stellt das Produkt  $[R \cdot Z \cdot s]$  die Zahl der Träger dar, die bei Bestrahlung von  $1 \text{ cm}^3$  Luft pro Sekunde insgesamt gebildet werden. Nun hat bekanntlich eine Röntgenstrahlung dann gerade die „Dosis“ von „1 internat. Röntgen“ oder „1r“, wenn bei Bestrahlung von  $1 \text{ cm}^3$  atmosphärischer Luft von  $0^\circ \text{ C}$  und  $760 \text{ mm Hg}$  Druck auf dem Wege der Trägerbildung ohne Wandwirkungsausfall und bei Sättigung eine elektrostatische Einheit der Elektrizitätsmenge entsteht. Das Produkt  $[R \cdot Z \cdot s]$  ist also proportional der „Dosisleistung“, und nach (43) und (44) ist dieser auch die Dichte der Träger in einem Punkte des Raumes proportional. Um für den Vergleich der Trägerdichte bei Röntgenstrahlen verschiedener Härte ein Maß zu haben, wird es zweckmäßig sein, wenn wir unsere Trägerdichte auf Röntgenstrahlen gleicher Dosisleistung beziehen. Wir dividieren also (43) und (44) durch  $[R \cdot Z \cdot s]$  und erhalten

$$(45) \quad \frac{D_i}{R \cdot Z \cdot s} = \frac{r^2}{2\varrho} \cdot \frac{dp_i}{d\varrho} = \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{r}{\varrho} \cdot g_i \left( \frac{r}{R}, \frac{\varrho}{r} \right),$$

$$(46) \quad \frac{D_a}{R \cdot Z \cdot s} = \frac{r^2}{2\varrho} \cdot \frac{dp_a}{d\varrho} = \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{r}{\varrho} \cdot g_a \left( \frac{r}{R}, \frac{\varrho}{r} \right),$$

wobei  $g_i$  und  $g_a$  durch (35) und (36) gegeben sind. Die rechten Seiten enthalten nun nur noch die Zahlenverhältnisse  $r/R$  und  $\varrho/r$ .

Für eine Strahlung bestimmter Härte und damit bestimmter Reichweite  $R$  sowie bestimmter Intensität oder besser Dosisleistung ist  $R \cdot Z \cdot s$  konstant. Wählen wir wieder  $R$  als Einheit, und drücken wir  $r$  und  $\varrho$  als Bruchteile von  $R$  aus, so erhalten wir in Abb. 10 die Dichtekurven für Strahlenbündel von verschiedenem Radius. Man erkennt, daß die Dichte der Träger in der Achse des zylindrischen Strahlenbündels am größten ist und nach dem Rande des Bündels zu abfällt. Am Rande des Bündels hat die Dichtekurve offenbar einen Wendepunkt. Außerhalb des Bündels fällt die Dichte monoton ab.

Der Vergleich der Dichtekurven lehrt, daß die Dichte in der Mitte des Strahlenbündels nahezu proportional dem Radius  $r$  des Bündels ist. Außerhalb des Bündels ist die Dichte bei hinreichend großem Abstände vom Bündel proportional dem Quadrate des Radius  $r$ , wie es zu erwarten ist, da die Zahl der Primärelektronen proportional  $r^2$  sein muß. Genauer als aus Abb. 10 läßt sich das aus Tab. 5 entnehmen, die die berechneten Zahlenwerte für den Fall  $\varrho = \frac{R}{2}$  selbst wieder gibt; immerhin zeigt aber auch Abb. 10, daß



bereits für  $\rho \geq 2r$  die Proportionalität der Dichte mit  $r^2$  in jedem Falle erfüllt ist.

Ist bei gleichem Radius  $r$  des Strahlenbündels die Härte der Röntgenstrahlen und damit die Reichweite  $R$  der Elektronen verschieden, die Dosisleistung aber dieselbe, so können wir  $R$  und  $\rho$

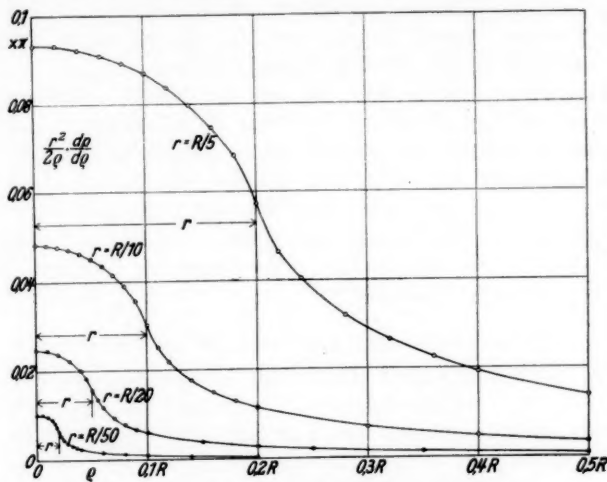


Abb. 10. Absolute Trägerdichte für verschiedene  $r$  als Bruchteile derselben Reichweite  $R$

Tabelle 5

Proportionalität von Trägerdichte und Querschnitt des Röntgenstrahlenbündels in großem Abstände von diesem, berechnet für halbe Reichweite

$\frac{r}{R}$	Dichte, berechnet	Dichteverhältnis	$\left(\frac{r}{R}\right)_1^2 : \left(\frac{r}{R}\right)_2^2$	$\Delta$ in %
$\frac{1}{5}$	0,01371	4,10	4	2,5
$\frac{1}{10}$	0,00334			
$\frac{1}{20}$	0,000827	6,20	6,25	0,7
$\frac{1}{50}$	0,0001332			

als Vielfache (oder als Bruchteile) von  $r$  darstellen. Wir erhalten dann offenbar Kurven, die mit denen der Abb. 9 zusammenfallen, wenn wir die Bezifferung der Ordinaten in Abb. 9 mit  $\pi$  multiplizieren. Da sich also nur der Ordinatenmaßstab ändert, so wurde

auf eine neue Darstellung verzichtet. Man erkennt, daß bei gleichem Radius  $r$  des Röntgenstrahlenbündels und bei gleicher Dosisleistung für Strahlen verschiedener Härte die Dichte der Träger in der Achse des Strahlenbündels nahezu umgekehrt proportional der Reichweite der Elektronen ist. Dieses Ergebnis ist qualitativ einleuchtend, da sich bei weichen Röntgenstrahlen die Bildung derselben Trägerzahl innerhalb eines engeren Raumes vollzieht als bei harten Strahlen; quantitativ ließ es sich indessen kaum voraussehen.

Man könnte geneigt sein, hieraus den Schluß zu ziehen, daß bei einer weichen Strahlung in einer Zylinderkammer schwerer Sättigung zu erzielen sei als bei harter Strahlung. Dem ist aber entgegenzuhalten, daß sich mit zunehmender Strahlenhärte die Trägerbildung von der Achse der Kammer mehr und mehr nach der Wandung hin und damit in Gebiete verschiebt, in denen die Feldstärke viel geringer ist als in der Umgebung der dem Bündel meist benachbarten Elektrode.

#### IX. Die experimentellen Ergebnisse für die Trägerdichte

Ein einfach geladener Träger hat die Ladung des Elektrons von  $4,770 \cdot 10^{-10}$  elektrostatischen Einheiten. Hat eine Röntgenstrahlung die Dosisleistung von 1 „r“ pro Sekunde, so werden nach unserer unter VIII, 2 aufgeführten Definition des „r“ bei Bestrahlung von  $1 \text{ cm}^3$  Luft von  $0^\circ \text{ C}$  und 760 mm Hg Druck in jeder Sekunde  $1/4,770 \cdot 10^{+10} = 2,095 \cdot 10^9$  Träger befreit und im Sättigungsstrom gemessen. Bei  $t^\circ \text{ C}$  und  $H$  mm Hg Druck entsteht von diesen nur der Bruchteil

$$\frac{1}{1 + 0,00367 \cdot t} \cdot \frac{H}{760},$$

für den sich bei den Messungen<sup>2)</sup> ( $+23^\circ \text{ C}$ ,  $H = 750 \text{ mm Hg}$ ) der Wert 0,91 ergab. Beträgt die Dosisleistung  $X$  „r“ pro Sekunde, und hat das Röntgenstrahlenbündel einen Radius von  $r \text{ cm}$ , so entstehen bei 1 cm Länge des Strahlenbündels  $0,91 \cdot 2,095 \cdot 10^9 \cdot r^2 \pi \cdot X$  Träger in der Sekunde. Nun ist nach VIII, 1

$$\frac{1}{2\pi q} \cdot \frac{dp_a}{dq}$$

der Bruchteil aller durch ein Röntgenstrahlenbündel von 1 cm Radius und von 1 cm Länge gebildeten Träger, der im Abstände  $q$  von der Bündelachse in jedem Kubikzentimeter entsteht. Das Produkt

$$(47) N = 0,91 \cdot 2,095 \cdot 10^9 \cdot \frac{r^2 \pi}{2\pi q} \cdot \frac{dp_a}{dq} \cdot X = 0,952 \cdot 10^9 \cdot \frac{r^2}{q} \cdot \frac{dp_a}{dq} \cdot X$$

ist demnach die Zahl der Träger, die ein Röntgenstrahlenbündel vom Radius  $r \text{ cm}$  und der Dosisleistung  $X$  „r“ pro Sekunde im Abstände

$\varrho$  cm von seiner Achse im Kubikzentimeter während einer Sekunde bei  $23^{\circ} \text{C}$  und 750 mm Hg Druck erzeugt. Hierin hat nach (36)

$$\frac{r^2}{\varrho} \cdot \frac{dp_a}{d\varrho} = \frac{r^2}{\varrho} \cdot R \cdot g_a \left( \frac{r}{R}, \frac{\varrho}{r} \right)$$

die Dimension einer Zahl;  $0,952 \cdot 10^9$  hat die Dimension einer Trägerzahl pro Ladung und  $X$  hat die Dimension einer Ladung

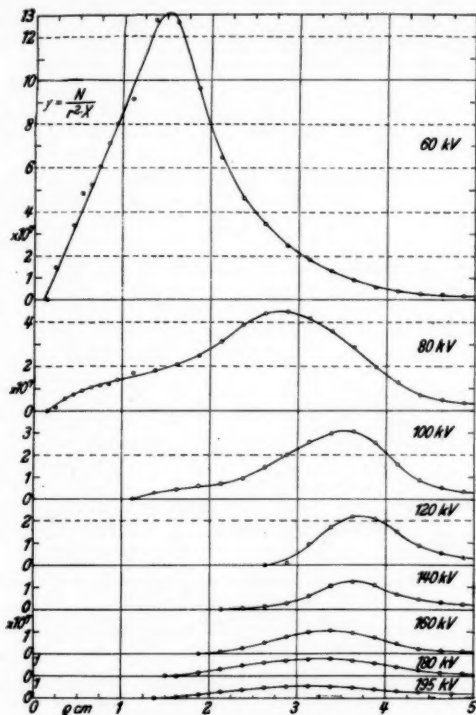


Abb. 11. Zahl der Phototräger pro Kubikzentimeter und pro Sekunde im Abstände  $\varrho$  von der Achse des Röntgenstrahlenbündels von 1 cm Radius bei 1 „ $\mu$ “ pro Sekunde (sowie  $23^{\circ} \text{C}$  und 750 mm Hg) (Hauptwolke)

pro Kubikzentimeter und pro Sekunde, so daß (47) die Dimension einer Trägerzahl pro Kubikzentimeter pro Sekunde hat.

Der Wert von  $dp_a/d\varrho$  läßt sich nun den Differentialkurven der Untersuchung I entnehmen. Dividieren wir ihn durch  $\varrho$  und multiplizieren wir ihn mit  $0,952 \cdot 10^9$ , so erhalten wir

$$(48) \quad y = \frac{N}{r^2 \cdot X},$$

d. h. die Zahl der Träger im Kubikzentimeter, die bei  $23^{\circ}\text{C}$  und 750 mm Hg Druck im Abstände  $\varrho$  von der Achse des Röntgenstrahlenbündels während jeder Sekunde entstehen, wenn dessen Radius 1 cm beträgt und wenn die „Dosisleistung“ pro Sekunde 1 „r“ ist. Das  $y$  ist in den Abb. 11—13 in Abhängigkeit von  $\varrho$  dargestellt; aus

$$(49) \quad N = y \cdot r^2 \cdot X$$

folgt für den Bündelradius von  $r$  cm und die Dosisleistung  $X$  in „r“ pro Sekunde die Trägerdichte  $N$  (47). Da hier das  $N$  dem  $r^2$

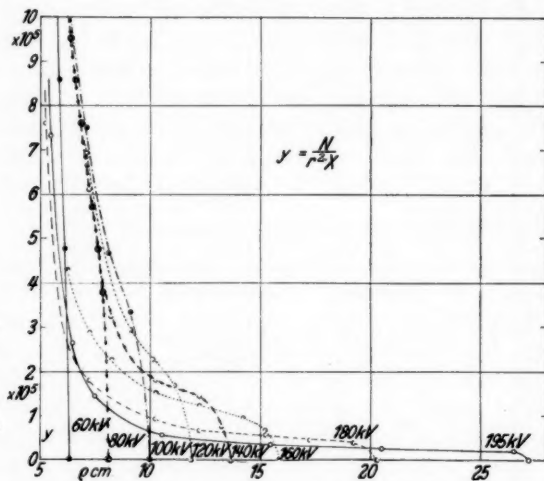


Abb. 12. Zahl der Phototräger pro Kubikzentimeter und pro Sekunde im Abstände  $\varrho$  von der Achse des Röntgenstrahlenbündels von 1 cm Radius bei 1 „r“ pro Sekunde (sowie  $23^{\circ}\text{C}$  und 750 mm Hg) (Schleierwolke)

proportional gesetzt ist, so folgt aus unserem Befunde von VIII, 2, daß die Abb. 11—13 nur für  $\varrho \geq 2r$  Geltung haben.

Vergleichen wir die Dichte der Hauptwolke der Phototräger (Abb. 11) mit der Abb. 7 der Untersuchung I, aus der sie gewonnen wurde, so zeigt sich bei 60 und 80 kV eine geringe Verschiebung des Maximums auf das Röntgenstrahlenbündel zu. Die Werte für  $\varrho < 1$  cm sind nicht so zuverlässig, was auch schon aus der Streuung der Punkte hervorgeht.

Die Dichte im Wolkenschleier der Phototräger gibt Abb. 12. Der Ordinatenmaßstab ist hier 100mal so groß gewählt wie in Abb. 11. Die systematische Überschneidung der Einzelkurven tritt hier wieder sehr deutlich zutage.

Auf die Dichtedarstellung der Wolke der Comptonträger von 60—195 kV wurde verzichtet, da die Wolke im Röntgenstrahlenbündel selbst ihr Maximum hat und schon in so geringem Abstände vom Strahlenbündel abgeklungen ist, daß die Forderung  $\varrho \geq 2r$  kaum erfüllt werden kann.

Demgegenüber hat die Wolke der Comptonträger von 250 bis 380 kV eine solche Ausdehnung, daß ihre Dichte in Abb. 13 wiedergegeben werden konnte. Dabei wurde absichtlich nicht weiter als

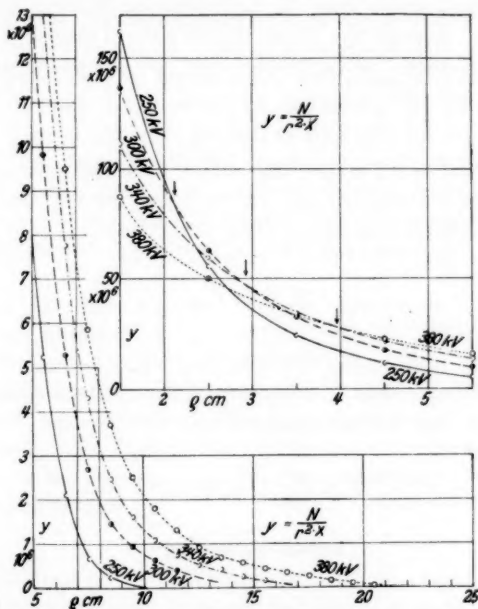


Abb. 13. Zahl der Comptonträger pro Kubikzentimeter und pro Sekunde im Abstände  $q$  von der Achse des Röntgenstrahlenbündels von 1 cm Radius bei 1 „r“ pro Sekunde (sowie 23° C und 750 mm Hg)

bis auf 1,5 cm an die Bündelachse herangegangen. Wir erkennen hier eine vorzügliche Übereinstimmung im Charakter der Kurven mit den berechneten Kurven der Abb. 7, und zwar sowohl hinsichtlich der gegenseitigen Überschneidungen (in Abb. 13 oben durch Pfeile markiert) als auch bezüglich der Reihenfolge bei der Einmündung in die Abszissenachse.

Daß die Kurven der Abb. 7 in die Abszissenachse unter einem Winkel einmünden, während sie sich beim Versuch (Abb. 13) tangential an diese heranziehen, erklärt sich zum kleineren Teil durch

die in der Rechnung vernachlässigte Richtungsverteilung der Primärelektronen, vorwiegend aber durch die Inhomogenität der benutzten Strahlungsmische, die Elektronen sehr verschiedener Reichweiten erzeugen.

Für eine andere Luftdichte als die bei den Versuchen, für die auch die Abb. 11—13 gelten, nämlich  $23^{\circ}\text{C}$  und 750 mm Hg Druck, erhält man die Trägerdichte leicht durch folgende Überlegung. Ändert man weder den Bündelradius noch die Dosisleistung der Röntgenstrahlen, wählt man die Luftdichte aber  $k$ mal so groß wie beim Versuch, so geht das räumliche Bild der Trägerwolke auf den Maßstab  $1:k$  zurück. Dann werden also die Abszissen der Abb. 11 bis 13 übergehen in

$$(50) \quad \varrho_k = \frac{\varrho}{k}.$$

Die gleiche Zahl von Trägern, die vorher in  $1\text{ cm}^3$  entstanden, wird bei der  $k$ fachen Dichte in  $1/k^3\text{ cm}^3$  gebildet werden; die Zahl der Träger im Kubikzentimeter ist dann also  $k^3$ mal so groß geworden, die Ordinaten der Abb. 11—13 gehen über in

$$(51) \quad y_k = y \cdot k^3,$$

und Gl. (49) nimmt die Form an

$$(52) \quad N_k = y_k \cdot r^2 \cdot X = y \cdot r^2 \cdot X \cdot k^3.$$

Ist die Dichte bei  $t^{\circ}\text{C}$  und bei  $H$  mm Hg Druck  $k$ mal so groß wie bei den Versuchen des Verf., für die die Abb. 11—13 gelten, so ist

$$(53) \quad k = \frac{1 + 0,00367 \cdot 23}{1 + 0,00367 \cdot t} \cdot \frac{H}{750} = 0,001445 \cdot \frac{H}{1 + 0,00367 \cdot t}.$$

#### Zusammenfassung

1. Ausgehend von der Tatsache, daß die Trägerbildung durch Röntgenstrahlen nach Kolonnen erfolgt, wird unter vereinfachenden Annahmen die Verteilung der Träger innerhalb und außerhalb eines Röntgenstrahlenbündels von kreisrundem Querschnitt in Abhängigkeit von dessen Radius  $r$  für jeden Raumpunkt im Abstände  $\varrho$  von der Bündelachse berechnet.

2. Die „Integralkurven“ und die „Differentialkurven“, die in der früheren Untersuchung I des Verf. die Trennung der Trägerwolken aus Streuabsorption und Photoabsorption für ein unendlich dünnes Röntgenstrahlenbündel auf experimenteller Grundlage ermöglichten, werden für ein kreisrundes Röntgenstrahlenbündel vom Radius  $r$  berechnet. Die früheren Kurven ergeben sich durch den Grenzübergang  $r \rightarrow 0$ . Die Unterschiede zwischen  $r = 0$  und  $r > 0$  werden erörtert.

3. Die für die Trennung der beiden Trägerwolkenarten grundlegenden Überschneidungen von Integralkurven, die für Röntgenstrahlen verschiedener Härte auf experimenteller Grundlage gefunden wurden, werden durch die Rechnung sichergestellt.

4. Die Dichte der Trägerwolken zeigt der Rechnung nach auf der Achse des Röntgenstrahlenbündels ein Maximum und fällt nach dem Rande hin ab; beim Überschreiten des Bündelrandes besteht kein Dichtesprung.

5. Für eine Strahlung gegebener Härte und Intensität ist die Trägerdichte in der Achse des Röntgenstrahlenbündels der Näherungsrechnung nach nahezu proportional dem Radius  $r$  des Strahlenbündels; außerhalb des Bündels ist die Dichte um so genauer proportional  $r^2$ , je größer der Abstand  $\rho$  vom Bündel ist.

6. Bei gleichem Radius des Strahlenbündels und bei Röntgenstrahlen verschiedener Härte, aber gleicher Dosisleistung ist die Trägerdichte in der Achse des Bündels der Näherungsrechnung nach nahezu umgekehrt proportional der Reichweite  $R$  der Primärelektronen.

7. Im Anschluß an die früheren Ergebnisse <sup>1), 2)</sup> des Verf. wird für die untersuchten extrem hart gefilterten Einzelstrahlungen zwischen 60 und 380 kV zahlenmäßig angegeben, wieviel Träger pro Sekunde und pro Kubikzentimeter in einem beliebigen Raumpunkte durch Photoelektronen oder durch Comptonelektronen erzeugt werden, wenn der Radius des Röntgenstrahlenbündels und die Dosisleistung der Strahlung nach internationalen „r“-Einheiten pro Sekunde bekannt sind.

#### Literatur

- 1) H. Küstner, Ann. d. Phys. [5] **35**. S. 153. 1939. (Teil I.)
- 2) H. Küstner, Ann. d. Phys. [5] **10**. S. 616. 1931.
- 3) H. Kulenkampff, Ann. d. Phys. [4] **80**. S. 261. 1926.
- 4) H. Kulenkampff, Ann. d. Phys. [4] **79**. S. 97. 1926.
- 5) A. Eisl, Ann. d. Phys. [5] **3**. S. 277. 1929.
- 6) L. Kiepert, Grundriß der Differential- und Integralrechnung, II., S. 681 und 682, IX. Aufl., Helwigsche Verlagsbuchhandlung, Hannover 1908.
- 7) E. Jahnke u. F. Emde, Funktionentafeln, 2. Aufl., S. 150, B. G. Teubner, Leipzig 1933.

Göttingen, Herzberger Landstr. 40.

(Eingegangen 21. Februar 1939)

### Zur Phasenanomalie optischer Wellen, insbesondere von Kugelwellen

Von H. W. Breuninger<sup>1)</sup>

(Mit 6 Abbildungen)

Pflanzt sich eine unbegrenzte ebene Welle von einem Punkte  $P_1$  nach einem Punkte  $P_2$  fort, wobei die Verbindungsgerade von  $P_1$  mit  $P_2$  auf der Wellenfläche senkrecht stehen möge, und ist  $\psi(P)$  die Phase der Lichtschwingung in  $P$ , dann ist

$$\psi(P_1) - \psi(P_2) = k \cdot \overline{P_1 P_2},$$

wobei  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $\lambda$  die Wellenlänge und  $\overline{P_1 P_2}$  die Entfernung der beiden Punkte bedeuten. Im Fall einer beliebigen sich von  $P_1$  nach  $P_2$  fortpflanzenden Welle ist

$$\psi(P_1) - \psi(P_2) = k \cdot \overline{P_1 P_2} - \delta.$$

$\delta$  ist die Phasenanomalie. Bei positivem  $\delta$  ist die Phase in  $P_2$  größer im Vergleich zur Phase in  $P_1$  als bei einer ebenen Welle: Positives  $\delta$  bedeutet eine Phasenbeschleunigung, negatives  $\delta$  entsprechend eine Phasenverzögerung.

1890 hat Gouy<sup>2)</sup> theoretisch gezeigt, daß eine konvergente Kugelwelle beim Durchgang durch ihren Brennpunkt eine Phasenbeschleunigung  $\pi$  erleidet. Die experimentelle Prüfung erfolgte mit dem Fresnelschen Spiegelversuch unter Verwendung eines Plan- und eines Hohlspiegels; die durch Reflexion am Planspiegel entstehende Welle divergiert vom Spiegelbild der Lichtquelle aus; durch den Hohlspiegel entsteht eine Kugelwelle, die gegen ihren Brennpunkt<sup>3)</sup> konvergiert und dann divergiert. Hinter diesem Brennpunkt war

1) Mit Ergänzungen versehener Auszug der Jenaer Dissertation „Zur Theorie des Verhaltens der Phase konvergenter Kugelwellen, insbesondere in der Umgebung des Brennpunktes“ (Verlag R. Noske, Borna, 1938).

2) G. Gouy, *Compt. rend.* 110. S. 1251. 1890; 111. S. 33, 910. 1890; *Ann. chim. phys.* (6) 24. S. 145. 1891.

3) Unter Brennpunkt der Kugelwelle wird hier der Punkt verstanden, nach welchem die Kugelwelle konvergiert. Er ist im allgemeinen verschieden vom Brennpunkt des Hohlspiegels. In obigem Fall ist er der durch den Hohlspiegel erzeugte Bildpunkt der Lichtquelle. Nur bei deren unendlicher Entfernung fallen Brennpunkt der Kugelwelle und des Hohlspiegels zusammen.



der mittlere Interferenzstreifen dunkel, wie Gouy zur Bestätigung seiner Theorie fand. Später wiesen Joubin<sup>1)</sup> und Fabry<sup>2)</sup> diese Phasenanomalie  $\pi$  mit den Newtonschen Interferenzringen nach. Eine andere Versuchsanordnung stammt von Zeeman<sup>3)</sup>, die auch Sagnac<sup>4)</sup> und Reiche<sup>5)</sup> benutzt haben: Das durch einen Spalt eintretende Licht passiert ein polarisierendes Nikol, dann eine durch eine kreisförmige Blende begrenzte, plankonvexe Kalkspatlinse und schließlich einen Analysator; die Nikols sind parallel oder gekreuzt; die optische Achse der Linse steht senkrecht zur Achse der Versuchsanordnung und bildet einen Winkel von  $45^\circ$  mit den Hauptschnitten der Nikols. Durch die doppelbrechende Linse entstehen zwei Kugelwellen mit verschiedenen Brennpunkten; diese Wellen besitzen gegeneinander eine Phasendifferenz, die durch Drehung einer zwischen der Linse und dem Analysator angebrachten planparallelen Kalkspatplatte beliebig eingestellt werden kann. Zeeman zeigte, daß wenn die Mitte der Interferenzerscheinung der beiden Wellen vor dem ersten Brennpunkt dunkel war, sie zwischen den beiden Brennpunkten hell und hinter dem zweiten Brennpunkt wieder dunkel wurde. Sagnac, der mit kleinerer Blende und größeren Brennweiten arbeitete, fand, daß bei kleiner Blendenöffnung am Brennpunkt kein plötzlicher Umschlag der Mitte des Interferenzbildes von hell nach dunkel erfolgt, sondern daß ein solcher Umschlag an mehreren Stellen zwischen den Brennpunkten stattfindet; die Phasenanomalie schwankt in Brennpunktsnähe oszillatorisch; erst bei größerer Blendenöffnung tritt der Helligkeitsunterschied bereits an Punkten kurz vor und hinter dem Brennpunkt auf. Die Erklärung der Phasenanomalie gab Sagnac auf Grund der beugungstheoretischen Behandlung einer durch eine kreisförmige Blende ausgeblendeten Kugelwelle und wies auf die Bedeutung hin, die unter Umständen bei den Experimenten den Unvollkommenheiten der Versuchsanordnung zukommen kann, indem dadurch die Feinheiten verwaschen werden. Etwas genauer als Sagnac berechnete Reiche das Verhalten einer ausgeblendeten Kugelwelle längs der optischen Symmetrieachse; die seiner Arbeit entnommene Abb. 1 stellt sein Ergebnis dar: Weit vor dem Brennpunkt ist die Phasenanomalie  $\delta = 0$ ; dann fängt  $\delta$  an, zwischen

1) P. Joubin, *Compt. rend.* 115. S. 932. 1892.

2) C. Fabry, *Compt. rend.* 115. S. 1063. 1892; *Journ. de phys.* (3) 2. S. 22. 1893.

3) P. Zeeman, *Phys. Ztschr.* 1. S. 542. 1900; *Arch. Néerland.* (2) 4. S. 318. 1901.

4) G. Sagnac, *Journ. de phys.* (4) 2. S. 721. 1903; *Compt. rend.* 138. S. 479. 1904; *Compt. rend.* 138. S. 619. 1904; *Compt. rend.* 138. S. 678. 1904; *Compt. rend.* 139. S. 186. 1904; *Boltzmann-Festschrift*, S. 528. 1904.

5) F. Reiche, *Ann. d. Phys.* [4] 29. S. 65. 1909.

positiven und negativen Werten zu pendeln; die Amplituden dieser Oszillation wachsen gegen den Brennpunkt zu; an diesem ist  $\delta = \frac{\pi}{2}$ , und schließlich pendelt  $\delta$  hinter dem Brennpunkt um  $\pi$ , wobei mit zunehmender Entfernung vom Brennpunkt die Größe der Schwankung abnimmt, so daß  $\delta$  weit hinter dem Brennpunkt gleich  $\pi$  wird. Bei der Berechnung hat Reiche vorausgesetzt, daß die Brennweite  $f$  und die Entfernung  $p$  des auf der Achse gelegenen

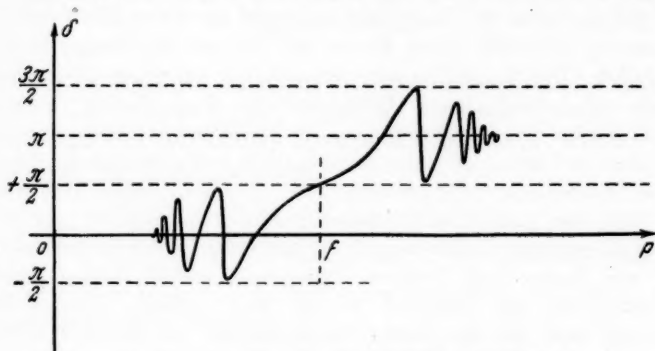


Abb. 1. Aus Ann. d. Phys. [4] 29. S. 82. 1909

Aufpunktes  $P$  von der Blende groß gegen deren Radius  $R$  seien:  $f \gg R$ ,  $p \gg R$ . Für den Fall, daß auf die Blende eine ebene Welle auftrifft, und diese durch die dort befindliche Linse in eine nach dem Brennpunkt konvergente Kugelwelle verwandelt wird, gelten die Formeln:

$$(1) \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{(2 - Q_1^2) \sin Q}{2 - (2 - Q_1^2) \cos Q}$$

mit der Nebenbedingung, daß  $\cos \delta$  und

$$\frac{2 - (2 - Q_1^2) \cos Q}{f - p}$$

dasselbe Vorzeichen haben. Dabei ist

$$(2) \quad Q_1 = \frac{R}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{f} \right) = -\frac{R}{\sqrt{2}} g,$$

$$(3) \quad g = \frac{1}{f} - \frac{1}{p}$$

und

$$(4) \quad Q = \frac{kR}{\sqrt{2}} Q_1 = \frac{kR^2}{2} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{f} \right).$$

Entsprechend wird die Intensität

$$I = |u_P|^2 = \frac{A^2}{4} \cdot \frac{f^2}{(f-p)^2} \{4 + (2 - Q_1^2)^2 - 4(2 - Q_1^2) \cos Q\},$$

wobei  $u_P$  die Lichtschwingung in  $P$  in komplexer Schreibweise ist;  $A$  ist die Amplitude in der Blende. Wegen der Voraussetzungen  $R \ll f$ ,  $R \ll p$  ist  $Q_1^2 \ll 2$ ; vernachlässigt man daher in obigen Formeln  $Q_1^2$  gegen 2, so wird

$$(5) \quad |u_P| = \frac{2Af}{|f-p|} \cdot \left| \sin \frac{Q}{2} \right|$$

und

$$(6) \quad \delta = \frac{\pi}{2} \mp \frac{|Q|}{2} \pm \pi \left[ \frac{|Q|}{2\pi} \right],$$

wobei das obere Vorzeichen vor und das untere hinter dem Brennpunkt gilt und  $[x]$  die größte ganze Zahl kleiner oder gleich  $x$  bezeichnet. Die Beugungserscheinung, die längs der optischen Achse auftritt, wenn eine ebene Welle eine Kreisöffnung, in der sich keine Linse befindet, passiert, ergibt sich aus diesen Formeln für  $f = \infty$ .

Möbius<sup>1)</sup> hat die Phasen-anomalie für Wellen berechnet, deren Wellenfläche eine in bezug auf die Ausbreitungsrichtung symmetrische Sattel-, Zylinder- oder Rotationsfläche ist. Weiter unten werde ich auf seine Ergebnisse noch etwas eingehen und sie ergänzen.

Debye<sup>2)</sup> gelang es, das Problem der durch eine Öffnung ausgeblendeten konvergenten Kugelwelle dadurch einfach zu gestalten, daß er die Blende nach Unendlich verlegte. Dabei ergab sich: Bei beliebiger Form der Blendenöffnung und überall in der Öffnung gleicher Amplitude ist

$$(7) \quad u_P = \frac{ik}{2\pi} \int e^{ikr \cos \tau} d\Omega,$$

wobei der Aufpunkt  $P$  irgendwo im Raum liegen kann;  $r$  ist die Entfernung des Aufpunktes vom Brennpunkt, der als Koordinatenanfang gewählt ist;  $\tau$  ist der Winkel zwischen dem Radiusvektor von  $P$  und dem Strahl, der in dem Raumwinkelement  $d\Omega$  liegt.

(7) ist eine strenge Lösung von  $\Delta u_P + k^2 u_P = 0$  trotz der Kirchhoffschen Annahmen, in welchen die Unstetigkeit steckt, daß in der Blende die Lichtschwingung gleich ist wie bei ungestörter Ausbreitung, daß sie aber an allen Stellen hinter dem Schirm verschwindet; am Blendenrand wird also eine Unstetigkeit vorausgesetzt. Wenn ich nun die Blende so nach Unendlich rücken lasse, daß der durch sie ausgeblendete Lichtkegel konstanten Öffnungswinkel behält,

1) W. Möbius, Ann. d. Phys. [4] 33. S. 79. 1910.

2) P. Debye, Ann. d. Phys. [4] 30. S. 755. 1909.

dann nimmt die Fläche der Blendenöffnung wie  $r^2$ , der Rand aber wie  $r$  zu, so daß der Einfluß des Randes im Verhältnis zur Fläche verschwindet. Dies erklärt anschaulich, wie trotz der am Rand angenommenen Unstetigkeit (7) eine strenge Lösung ist.

Für eine kreisförmige Blende folgt aus (7) bei Einführung von Polarkoordinaten um die Achse des Lichtkegels vom halben Öffnungswinkel  $\alpha$ ;

$$(8) \quad u_P = i k \int_0^\alpha e^{i k r \cos \vartheta \cos \vartheta'} J_0(k r \sin \vartheta \sin \vartheta') \cdot \sin \vartheta' \cdot d \vartheta'.$$

Die Koordinaten von  $P$  sind dabei  $r, \vartheta, \varphi$ .  $\vartheta = 0$  kennzeichnet axiale Aufpunkte vor und  $\vartheta = \pi$  solche hinter dem Brennpunkt. Auf der Achse wird:

$$(9) \quad u_P = \pm \frac{e^{\pm i k r} - e^{\pm i k r \cos \alpha}}{r},$$

wobei das obere Vorzeichen für  $\vartheta = 0$ , das untere für  $\vartheta = \pi$  gilt. Für nichtaxiale, weit vom Brennpunkt entfernte Aufpunkte hat Debye näherungsweise  $u_P$  berechnet. Er teilte dazu das Integrationsgebiet in zwei geeignete Bereiche und stellte so  $u_P$  als Summe zweier Bestandteile,  $u_{PI}$  und  $u_{PII}$ , dar.  $u_{PI}$  konnte er genau berechnen; für  $u_{PII}$  fand er einen Näherungswert dadurch, daß er  $u_{PII}$  durch partielle Integration des betreffenden Integrals in eine Reihe nach  $r^{-1}$  entwickelte und dann nur das erste Glied berücksichtigte. So fand er für weit vom Brennpunkt entfernte nichtaxiale Aufpunkte

$$(10) \quad \begin{aligned} u_P &= \frac{e^{i k r}}{r}, \text{ wenn } 0 < \vartheta < \alpha, \\ u_P &= 0, \text{ wenn } \alpha < \vartheta < \pi - \alpha, \end{aligned}$$

$$(11) \quad u_P = -\frac{e^{-i k r}}{r}, \text{ wenn } \pi - \alpha < \vartheta < \pi \text{ ist.}$$

Aus dem Vorzeichenunterschied zwischen (10) und (11) folgt, daß zwischen weit hinter dem Brennpunkt liegenden nichtaxialen Aufpunkten und weit vor dem Brennpunkt liegenden eine Phasen-anomalie  $\pi$  besteht. Ebenso haben v. Laue<sup>1)</sup> und Jentzsch<sup>2)</sup> aus (9) geschlossen, daß zwischen zwei axialen Aufpunkten, von denen der eine vor und der andere hinter dem Brennpunkt liegt, die Phasen-anomalie  $\pi$  auftritt. Picht<sup>3)</sup> hat auf diesen Irrtum aufmerksam gemacht. Ist die Phasen-anomalie des Achsenpunktes vor dem Brennpunkt  $\delta_v$ , diejenige des hinter dem Brennpunkt gelegenen Achsen-

1) M. v. Laue, Enzykl. d. math. Wiss. 5. Teil 3. S. 439—444.

2) F. Jentzsch, Handb. d. Physik 18. S. 265—268.

3) J. Picht, Ztschr. f. Phys. 65. S. 14. 1930.

punktes  $\delta_h$ , dann ist die Phasenanomalie zwischen den beiden Punkten  $\delta_h - \delta_p$ , und diese Differenz kann bei noch so großer Entfernung der Aufpunkte vom Brennpunkt alle Werte zwischen 0 und  $2\pi$  annehmen.

Unlängst hat sich der Verfasser<sup>1)</sup> mit diesem Problemkreis auseinandergesetzt. Es ergab sich:

I. Wenn wie bei der Berechnungsmethode von Reiche die Blende im Endlichen liegt, dann schrumpfen die Amplituden der Schwankungen von  $\delta$  nicht so rasch mit zunehmender Entfernung vom Brennpunkt zusammen, als die Abb. 1 den Anschein erweckt. Für das Gebiet zwischen Brennpunkt und Blende konnte durch graphische Veranschaulichung des in der Kirchhoffschen Formel auftretenden Integrals gezeigt werden, daß bei einer ebenen durch eine Kreisblende tretenden Welle und ebenso bei einer konvergenten Kugelwelle, wenn die Brennweite  $f \gg R$  (Blendenradius) ist, in axialen Aufpunkten in der Nähe der Blende  $\delta$  noch mindestens zwischen  $\pm \frac{\pi}{6}$  mit sich verändernder Entfernung von der Blende schwankt. Ein Erlöschen der Oszillationen von  $\delta$  ergibt sich selbst aus (1) nicht, solange (1) überhaupt gilt, d. h. solange  $p \gg R$  ist.

II. Hinter dem Brennpunkt finden bei im Endlichen gelegener Blende nur endlich viele, nämlich  $\left[ \frac{kR^2}{4\pi f} \right]$  Schwankungen von  $\delta$  statt. Dabei sind die Amplituden der Pendelung von  $\delta$  hinter dem Brennpunkt stets so groß, daß  $\delta$  ein Intervall von mindestens  $140^\circ$  durchläuft. Nur der Mittelwert, um den  $\delta$  schwankt, unterscheidet sich hinter dem Brennpunkt um  $\pi$  von dem Mittelwert vor dem Brennpunkt. Selbst bei großer Brennweite  $f$  braucht das Verhalten von  $\delta$  sich noch lange nicht dem Debyeschen Fall (Verlegung der Blende ins Unendliche) zu nähern.

III. Nach (1) bis (4) kann  $\delta$  als Funktion von  $g$  aufgefaßt werden. Da  $g$  vor dem Brennpunkt negativ, hinter ihm positiv ist, ergibt sich das Verhalten von  $\delta$  hinter diesem aus demjenigen vor ihm durch Vorzeichenumkehr bei  $g$ , wobei zu beachten ist, daß vor dem Brennpunkt  $g$  alle Werte von  $-\infty$  bis 0 annimmt, hinter ihm jedoch nur von 0 bis  $1/f$  zunimmt; dies scheint Reiche bei Abb. 1 nicht beachtet zu haben.

IV. (9) läßt sich schreiben

$$u_p = 2 \left| \sin \left( kr \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \right| \cdot \frac{e^{\pm ikr}}{r} \cdot e^{i\delta},$$

1) H. W. Breuninger, Jenaer Dissertation 1938.



VII. Es wird für den Fall einer im Unendlichen liegenden Kreisblende, durch die eine konvergente Kugelwelle eintritt, gezeigt, daß wenn die Aufpunkte  $P_1$  und  $P_2$  in derselben Entfernung vom Brennpunkt auf demselben geometrisch-optischen Strahl liegen, aber  $P_1$  vor und  $P_2$  hinter dem Brennpunkt ist, sich

$$(13) \quad u_{P_2} = -\overline{u_{P_1}}$$

und

$$(14) \quad \delta_1 + \delta_2 = \pi$$

ergibt, wobei  $\delta_n$  die Phasenanomalie in  $P_n$  ist.

Auf Grund des Babinetschen Prinzips läßt sich noch eine andere, ähnliche Beziehung ableiten. Es trete durch die im Unendlichen liegende Blende vom halben Öffnungswinkel  $\alpha$  eine konvergente Kugelwelle. Die dadurch hervorgerufene Lichtschwingung in einem Aufpunkt  $P$  sei wieder  $u_P$ . Nun falle aus entgegengesetzter Richtung ein Lichtkegel vom halben Öffnungswinkel  $\pi - \alpha$  ein, der durch einen kreisförmigen Schirm aus einer konvergenten Kugelwelle ausgeblendet wird. Die dadurch in  $P$  erzeugte Lichtschwingung sei  $v_P$ . Dann ist die Summe von  $u_P$  und  $v_P$  gleich der Lichtschwingung bei allseitig einfallender Kugelwelle. Diese ist unabhängig von  $\vartheta$  und kann daher aus (9) berechnet werden, indem man dort  $\alpha = \pi$  setzt. Somit wird

$$u_P + v_P = \frac{2i}{r} \cdot \sin(kr).$$

Falle  $\vartheta \leq \alpha$  und  $2\vartheta + \varepsilon > \frac{\pi}{2}$  stets  $|\sin(2\vartheta + \varepsilon)| \geq s^{-1/2}$  ist. Sonst genügt

überall die Voraussetzung  $\cos \alpha \geq s^{-1/2}$ , was für  $\alpha + \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$  stets erfüllt ist.

Ich gebe nun hier einen andern Beweis für  $|\sin(2\vartheta + \varepsilon)| \geq s^{-1/2}$ , der nicht mehr die Voraussetzung  $\cos \alpha \geq s^{-1/2}$  gebraucht, sondern ebenfalls mit  $\alpha + \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$  auskommt. Es ist nämlich

$$\frac{\pi}{2} < 2\vartheta + \varepsilon \leq 2\alpha + \varepsilon \leq \pi - \varepsilon$$

und somit

$$|\sin(2\vartheta + \varepsilon)| \geq \sin(\pi - \varepsilon) = \sin \varepsilon = 2 \cos \frac{\varepsilon}{2} \sin \frac{\varepsilon}{2} \geq \sin \frac{\varepsilon}{2} = s^{-1/2}.$$

Es ist daher in den Voraussetzungen (31) auf S. 20 der erwähnten Arbeit  $\cos \alpha \geq s^{-1/2}$  zu ersetzen durch  $\alpha + \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$  mit  $\varepsilon = 2 \cdot \arcsin s^{-1/2}$ . Diese Abänderung bedeutet für die unten folgende Tabelle der  $u_P$ -Werte eine Vereinfachung der Einteilung der  $\alpha$ -Werte.



Sei nun der Aufpunkt  $P'$  auf demselben geometrischen Strahl wie  $P$  und in gleicher Entfernung vom Brennpunkt, aber auf der entgegengesetzten Seite, so ist die Lichtschwingung  $u_{P'}$  dann gleich  $v_{P'}$ , und somit

$$(15) \quad u_P + u_{P'} = \frac{2i}{r} \cdot \sin(kr),$$

wenn die Lichtschwingung  $u_{P'}$  in  $P'$  (Poldistanz  $\vartheta' = \pi - \vartheta$ ) erzeugt wird von einem von vorn<sup>1)</sup> einfallenden konvergenten Lichtkegel vom Öffnungswinkel  $\alpha' = \pi - \alpha$ , während die Lichtschwingung  $u_P$  in  $P$  (Poldistanz  $\vartheta$ ) erzeugt wird von einem aus gleicher Richtung einfallenden Lichtkegel vom Öffnungswinkel  $\alpha$ .

Nachdem die Werte für  $u_P$  für die Fälle  $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$  und  $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$  vorliegen, läßt sich zunächst mit Hilfe von (13)  $u_P$  für  $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$  und  $\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi$  angeben und schließlich mit Hilfe von (15) auch für  $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$  und  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ . Es bleibt noch  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  übrig. Dafür und für  $\vartheta = 0$  gilt (9). Im Fall  $\alpha = \frac{\pi}{2} = \vartheta$  wird nach (15)  $u_P = u_{P'}$ , also

$$u_P = \frac{i}{r} \cdot \sin(kr).$$

Der Fall  $0 < \vartheta < \alpha = \frac{\pi}{2}$  läßt sich analog zu  $0 < \vartheta < \alpha < \frac{\pi}{2}$  erledigen<sup>2)</sup>: Es sei

$$s^{-1/4} \leq \vartheta \leq \alpha - \varepsilon = \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad \varepsilon = 2 \cdot \arcsin s^{-1/4}.$$

Damit  $u_P$  für große  $s (= kr)$  näherungsweise gleich  $\frac{e^{ikr}}{r}$  wird, braucht nur gezeigt zu werden, daß die folgenden Größen nicht kleiner als  $s^{-1/4}$  sind<sup>3)</sup>:  $\sin \varepsilon$ ,  $|\sin(s^{-1/4} - \vartheta)|$ ,  $|\sin(s^{-1/4} + \vartheta)|$ ,  $|\sin(2\vartheta - \varepsilon)|$ ,  $|\sin(2\vartheta + \varepsilon)|$ ,  $|\sin(\frac{\pi}{2} - \vartheta)|$ ,  $|\sin(\frac{\pi}{2} + \vartheta)|$ . Für genügend große  $s$  ist nun

1.  $\sin \varepsilon = 2 \cos \frac{\varepsilon}{2} \sin \frac{\varepsilon}{2} \geq \sin \frac{\varepsilon}{2} = s^{-1/4}$ ;
2.  $\sin(\vartheta - s^{-1/4}) \geq \sin(s^{-1/4} - s^{-1/4}) = \sin\{s^{-1/4}(1 - s^{-1/4})\} \geq \sin(0,9 \cdot s^{-1/4})$   
 $\geq \frac{1}{2} \cdot s^{-1/4} \geq s^{-1/4}$ ;

1)  $\vartheta = 0$  ist die Lichtkegelhalbachse vor,  $\vartheta = \pi$  diejenige hinter dem Brennpunkt.

2) H. W. Breuninger, a. a. O., S. 26.

3) H. W. Breuninger, a. a. O., Bedingungen (33) S. 20, (35) S. 23, (35') S. 26.



$$3. \vartheta + s^{-1/2} \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon + s^{-1/2} \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon + s^{-1/2} \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon + \frac{s}{2} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{und } \sin(\vartheta + s^{-1/2}) \geq \sin(s^{-1/2} + s^{-1/2}) \geq \sin s^{-1/2} \geq \frac{1}{2} s^{-1/2} \geq s^{-1/2};$$

$$4. \text{ Wenn } 2\vartheta - \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}, \text{ dann ist}$$

$$|\sin(2\vartheta - \varepsilon)| \geq \sin\{2(s^{-1/2} - 1,0015 \cdot s^{-1/2})\} \geq s^{-1/2} - 1,0015 \cdot s^{-1/2} \geq s^{-1/2},$$

$$\text{weil für } \varepsilon < \frac{\pi}{18} \text{ (was angenommen werden darf)}$$

$$\varepsilon < 2,003 \cdot s^{-1/2}$$

$$\text{ist; ist } 2\vartheta + \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}, \text{ dann ist auch } 2\vartheta - \varepsilon \leq \frac{\pi}{2} \text{ und}$$

$$\sin(2\vartheta + \varepsilon) \geq \sin(2\vartheta - \varepsilon) \geq s^{-1/2};$$

$$5. \text{ Ist } 2\vartheta + \varepsilon > \frac{\pi}{2}, \text{ dann ist wegen } \vartheta \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

$$\sin(2\vartheta + \varepsilon) \geq \sin \varepsilon \geq s^{-1/2};$$

$$\text{ist } 2\vartheta - \varepsilon > \frac{\pi}{2}, \text{ dann ist auch } 2\vartheta + \varepsilon > \frac{\pi}{2} \text{ und}$$

$$\sin(2\vartheta - \varepsilon) \geq \sin(2\vartheta + \varepsilon) \geq s^{-1/2}.$$

6. Schließlich ist

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) \geq \sin \varepsilon \geq s^{-1/2}.$$

Nach (13) ergibt sich nun auch  $u_p$  für  $\alpha = \frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi$ .

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die Werte von  $u_p$ . Dazu ist zu bemerken:

— bedeutet, daß die für dieses Fach geltende Wertekombination von  $\alpha$  und  $\vartheta$  sinnlos ist, z. B.  $\alpha = 0, s^{-1/2} \leq \vartheta \leq \alpha - \varepsilon$ .

— bedeutet, daß bei dem zugehörigen  $\alpha$ -Wert das  $\vartheta$ -Intervall in mehrere Teilintervalle zerfällt, für welche  $u_p$  je einen besondern Wert annimmt, z. B.  $s^{-1/2} + \varepsilon \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$  und  $s^{-1/2} \leq \vartheta \leq \pi - \alpha - \varepsilon$ ; hier zerfällt das  $\vartheta$ -Intervall in  $s^{-1/2} \leq \vartheta \leq \alpha - \varepsilon$ ;  $\vartheta = \alpha$ ;  $\alpha + \varepsilon \leq \vartheta \leq \pi - \alpha - \varepsilon$ ; der Wert für  $u_p$  ist daher in diesen drei Fächern zu suchen.

Die fett gedruckten Werte gelten für beliebiges  $r$ ; die andern sind Grenzwerte für großes  $r$ .

Sämtliche verwendeten Abschätzungen<sup>1)</sup> gelten für  $s \geq 25 \cdot 10^6$ , d. h. bei  $\lambda = 5 \cdot 10^{-6}$  cm für  $r \geq 200$  cm. Für  $s = 25 \cdot 10^6$  wird

1) Mit einer Ausnahme, nämlich der in Breuninger, a. a. O., S. 29 auftretenden Abschätzung  $s^{-1/2} - 2s^{-1/2} \geq s^{-1/2}$ . Diese Ungleichung ist aber in der Fußnote 1) S. 234 durch eine andere ersetzt worden, die ebenfalls für  $s \geq 25 \cdot 10^6$  erfüllt ist.

$u_p$  in Abhängigkeit von  $\alpha$  und  $\vartheta$ 

$\alpha \backslash \vartheta$	$=0$	$\geq s^{-1/2} + \varepsilon$ $\leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$	$= \frac{\pi}{2}$	$\geq \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ $\leq \pi - s^{-1/2} - \varepsilon$	$= \pi$
$= 0$	0	$\frac{e^{ikr} - e^{ikr \cos \alpha}}{r}$	$\frac{e^{ikr} - 1}{r}$	$\frac{e^{ikr} - e^{ikr \cos \alpha}}{r}$	$\frac{2i \cdot \sin(kr)}{r}$
$\geq s^{-1/2}$ $\leq \alpha - \varepsilon$	—	$\frac{e^{ikr}}{r}$	$\frac{e^{ikr}}{r}$	$\frac{e^{ikr}}{r}$	$\frac{2i \cdot \sin(kr)}{r}$
$= \alpha$	0	$\frac{e^{ikr}}{2r}$	$\frac{i \cdot \sin(kr)}{r}$	$\frac{e^{ikr}}{2r} - \frac{e^{-ikr}}{r}$	$\frac{2i \cdot \sin(kr)}{r}$
$\geq \alpha + \varepsilon$ $\leq \pi - \alpha - \varepsilon$	0	0	—	—	—
$\geq s^{-1/2}$ $\leq \pi - \alpha - \varepsilon$	0	$\frac{e^{ikr}}{r}$	$\frac{e^{ikr}}{r}$	$\frac{e^{ikr}}{r}$	—
$\geq \pi - \alpha + \varepsilon$ $\leq \pi - s^{-1/2}$	—	$-\frac{e^{-ikr}}{r}$	$-\frac{e^{-ikr}}{r}$	$\frac{e^{-ikr}}{r}$	$\frac{2i \cdot \sin(kr)}{r}$
$\geq \pi - \alpha + \varepsilon$ $\leq \alpha - \varepsilon$	—	—	—	$\frac{2i \cdot \sin(kr)}{r}$	$\frac{2i \cdot \sin(kr)}{r}$
$= \pi - \alpha$	0	$-\frac{e^{-ikr}}{2r}$	$\frac{i \cdot \sin(kr)}{r}$	$\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{-ikr}}{2r}$	$\frac{2i \cdot \sin(kr)}{r}$
$\geq \alpha + \varepsilon$ $\leq \pi - s^{-1/2}$	0	$\frac{e^{-ikr}}{r}$	$-\frac{e^{-ikr}}{r}$	$-\frac{e^{-ikr}}{r}$	—
$= \pi$	0	$-\frac{e^{-ikr} - e^{-ikr \cos \alpha}}{r}$	$-\frac{e^{-ikr} - 1}{r}$	$-\frac{e^{-ikr} - e^{-ikr \cos \alpha}}{r}$	$\frac{2i \cdot \sin(kr)}{r}$

$s^{-1/2} = 0,119 = 6^{1/2}$  und  $\varepsilon = 6^{1/2}$ . Will ich nun  $u_p$  längs eines nicht-axialen geometrischen Strahls untersuchen, dessen Poldistanz kleiner als  $6^{1/2}$  ist, dann habe ich  $s$  so groß zu wählen, daß  $s^{-1/2} \leq \vartheta$  wird, damit die Näherung (10) einigermaßen erfüllt ist. Je weniger sich  $\vartheta$  von 0 unterscheidet, desto größer muß  $s$  sein. Im Endlichen ist  $u_p$  stetig; denn zwischen den Winkeln, für welche z. B. die Formel (9) und die Näherungsformel (10) gilt, ist ein Intervall auszunehmen, in welchem der stetige Übergang von (9) zu (10) erfolgt. Dieses Intervall wird desto kleiner, je größer  $s$  ist. Im Unendlichen selbst ist  $u_p$  allerdings unstetig, was auch zu erwarten ist; denn die ganze Ab-

leitung erfolgte auf Grund der Kirchhoffschen Formel mit den zugehörigen bekannten Annahmen, wodurch voraussetzungsgemäß im Unendlichen eine Unstetigkeit vorhanden ist. (10) gilt, allgemein ausgedrückt, für genügend große  $s$  in dem durch die beiden Rotationsflächen  $\vartheta = s^{-\sigma}$  und  $\vartheta = \alpha - \varepsilon$  ( $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ) begrenzten Raum; nach den obigen Beweisen ist  $\sigma = \frac{1}{8}$ ; es ist aber ohne weiteres möglich, daß für  $\sigma$  auch größere Werte als  $\frac{1}{8}$  zulässig wären; der Beweisgang müßte entsprechend geändert werden.

Unter der Voraussetzung  $kr \cdot \sin \vartheta \ll 1$  und unter der Annahme von kleinem  $\alpha$  gilt in der Umgebung der Achse eines konvergenten Lichtkegels, der durch Ausblendung einer Kugelwelle durch einen im Unendlichen gelegenen Kreisschirm entsteht, folgende Näherungsformel<sup>1)</sup>:

$$(16) \quad u_P = \frac{1}{r \cdot \cos \vartheta} \left\{ \psi_1 - \frac{k^2 r^2 \sin^2 \vartheta}{4} \psi_2 \right\}$$

mit

$$\psi_1 = e^{i k r \cos \vartheta} - e^{i k r \cos \vartheta \cos \alpha},$$

$$\psi_2 = e^{i k r \cos \vartheta} \cdot \left( \frac{-2i}{kr \cdot \cos \vartheta} + \frac{2}{k^2 r^2 \cdot \cos^2 \vartheta} \right) - e^{i k r \cos \vartheta \cos \alpha} \cdot \left( \sin^2 \alpha - \frac{2i \cos \alpha}{kr \cdot \cos \vartheta} + \frac{2}{k^2 r^2 \cdot \cos^2 \vartheta} \right).$$

Diese Formel gilt auch in der Brennpunktebene ( $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ) in der Umgebung des Brennpunktes. Es läßt sich aus (16) für  $\vartheta \leq \alpha \ll 1$  noch eine Näherungsformel für  $\delta$  ableiten, nämlich

$$(17) \quad \delta = \frac{\pi}{2} - \frac{kr \alpha^2}{4} - \frac{kr \vartheta^2}{2}.$$

Diese Formel besagt, daß längs einem nichtaxialen Strahl in der Umgebung des Brennpunktes in der Entfernung  $r_1$  vor dem Brenn-

1) H. W. Breuninger, a. a. O., S. 31; Debye hat eine etwas davon abweichende Näherungsformel angegeben, nämlich

$$u_P = \frac{1}{r \cdot \cos \vartheta} \cdot \left\{ \Phi_1 - \frac{k^2 r^2 \sin^2 \vartheta}{4} \Phi_2 \right\}$$

mit

$$\Phi_1 = e^{i k r \cos \vartheta} - e^{i k r \cos \vartheta \cos \alpha}$$

und

$$\Phi_2 = e^{i k r \cos \vartheta} \left( \frac{-2i}{kr \cdot \cos \vartheta} + \frac{2}{k^2 r^2 \cos^2 \vartheta} \right) - e^{-i k r \cos \vartheta \cos \alpha} \cdot \left( \frac{-2i}{kr \cos \vartheta \cos \alpha} + \frac{2}{k^2 r^2 \cos^2 \vartheta \cos^2 \alpha} \right).$$

punkt annähernd die Phasen-anomalie vorhanden ist, die in einer Entfernung  $r_2$  ( $> r_1$ ) auf der Achse vor dem Brennpunkt herrscht, wobei die Differenz  $r_2 - r_1$  desto größer ist, je größer der Winkel zwischen dem nichtaxialen Strahl und der Achse ist.

Weicht die Blendenform von einem Kreise ab, so ändert sich das Verhalten von  $u_p$ . Nach Rubinowicz<sup>1)</sup> existiert bei einer konvergenten Kugelwelle zwischen genügend weit vor und hinter dem Brennpunkt gelegenen Aufpunkten stets eine Phasen-anomalie  $\pi$  bei beliebiger Gestalt der Blende mit Ausnahme einiger spezieller Blendenformen, wozu auch die Kreisblende gehört. So tritt im Gegensatz zur Kreisblende bei einer rechteckigen Blende längs der Achse weit genug hinter dem Brennpunkt die Phasen-anomalie  $\pi$  auf.

Die theoretische Ableitung der Phasen-anomalie z. B. bei Gouy erfolgte durch Einteilung der Wellenfläche in unendlich schmale parallele Streifen, wobei keine Abhängigkeit der Länge dieser Streifen von ihrer Lage angenommen wurde. Daher gilt die Ableitung bei Gouy für eine rechteckige Blende, weswegen er auch die Phasen-anomalie  $\pi$  erhielt.

Möbius hat  $\delta$  für den Fall untersucht, daß die konvergente Welle Wellenflächen verschiedener Gestalt besitze. Für die konvergente Kugelwelle erhält er zunächst in dem Kapitel „Berechnung der Phasen-anomalie einer Sattelfläche“ nach einem Rechenverfahren, das ähnlich wie bei Gouy im Prinzip eine Rechtecksblende voraussetzt, weit hinter dem Brennpunkt die Phasen-anomalie  $\pi$ . In dem darauf folgenden Kapitel „Berechnung der Phasen-anomalie einiger anderer Flächen“ wird für Rotationsflächen ein Verfahren angewandt, das einer Kreisblende entspricht, ohne daß dies erwähnt wird. In der dazu gehörigen Tabelle wird als Phasen-anomalie einer Kugelwelle hinter dem Brennpunkt der Wert  $\pi$  angegeben, obwohl sich jetzt wegen der Kreisblende für  $\delta$  ein Wert entsprechend den Formeln (1), (6) oder (12) ergeben müßte. Es ist daher angebracht, das Rechenverfahren von Möbius durchzunehmen, wobei wir es gleichzeitig verallgemeinern.

Abb. 3 stellt im Schnitt die durch die Blende gehende Wellenfläche dar. Nach Möbius ist die Phasen-anomalie  $\delta$  in unendlicher Entfernung von dieser Wellenfläche gegeben durch<sup>2)</sup>

$$(18) \quad \delta = \arctg \frac{\int \cos q \cdot d\sigma}{\int \sin q \cdot d\sigma} = \arg i \int e^{-iq} \cdot d\sigma, \quad q = k\Delta.$$

1) A. Rubinowicz, Phys. Rev. 54. S. 931. 1938.

2) W. Möbius, a. a. O., S. 109.

Es ist dabei über die Blendenöffnung zu integrieren. Ist die Wellenfläche ein Zylinder, dann sei die Blende ein Rechteck von der Höhe  $h$  und

$$(19) \quad d\sigma = h \sqrt{(d\xi)^2 + (d\Delta)^2};$$

ist sie eine Rotationsfläche, dann sei die Blende kreisförmig und

$$(20) \quad d\sigma = 2\pi \xi \sqrt{(d\xi)^2 + (d\Delta)^2}.$$

Konkave Wellenflächen unterscheiden sich von konvexen gleicher Form nur durch das Vorzeichen von  $\Delta$ ;  $d\sigma$  ist stets positiv; ist

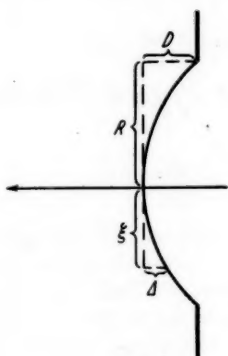


Abb. 3

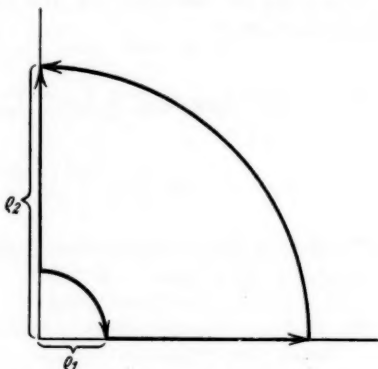


Abb. 4

daher  $\delta_v$  die Phasen-anomalie einer konkaven und  $\delta_x$  diejenige einer konvexen Welle in unendlicher Entfernung von der Blende, dann ist nach (18)

$$(21) \quad \delta_v + \delta_x = \pi.$$

Dies entspricht (14); denn von einem axialen Aufpunkt vor dem Brennpunkt erscheint die Wellenfläche einer konvergenten Kugelwelle konvex, von einem Achsenpunkt hinter dem Brennpunkt aber konkav.

Wir beschränken uns wegen (21) auf die Berechnung von  $\delta_x$ . Dabei werden wir davon Gebrauch machen, daß

$$(22) \quad \int z^n \cdot e^{-z} \cdot dz,$$

integriert über die positive imaginäre Achse, gleich demselben Integral, erstreckt über die positiv reelle Achse ist, wenn  $-1 < n < 0$  ist <sup>1)</sup>.

1) Vgl. W. Möbius, a. a. O., S. 94.

Es ist nämlich das Integral über ein Stück der positiv imaginären Achse gleich demjenigen über ein entsprechendes Stück der reellen Achse, vermehrt um dasjenige über zwei Viertelkreisbogen (Abb. 4) mit den Radien  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$ . Auf den Bogen ist  $z = \varrho \cdot e^{i\varphi}$ . Also ist das Integral über einen Bogen gleich

$$(23) \quad i \varrho^{n+1} \int_0^{\pi/2} e^{-\varrho \cos \varphi} \cdot e^{-i \varrho \sin \varphi} \cdot e^{i(n+1)\varphi} \cdot d\varphi.$$

Dies verschwindet aber, wenn  $\varrho = \varrho_1$  und  $\lim \varrho_1 = 0$  ist für  $-1 < n$ . Ist  $\varrho = \varrho_2$ , so betrachte ich  $\lim \varrho_2 = \infty$ . Der Betrag von (23) ist höchstens gleich

$$\begin{aligned} \varrho_2^{n+1} \int_0^{\pi/2} e^{-\varrho_2 \cos \varphi} d\varphi &\leq \varrho_2^{n+1} \int_0^{\pi/4} e^{-\varrho_2 \cos \varphi} \cdot d\varphi + \frac{\varrho_2^{n+1}}{\sqrt{2}} \int_{\pi/4}^{\pi/2} e^{-\varrho_2 \cos \varphi} \cdot \sin \varphi d\varphi \\ &\leq \varrho_2^{n+1} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot e^{-\frac{\varrho_2}{\sqrt{2}}} + \frac{\varrho_2^n}{\sqrt{2}} - \frac{\varrho_2^n}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{\varrho_2}{\sqrt{2}}}. \end{aligned}$$

Die drei letzten Glieder verschwinden für  $n < 0$  mit  $\varrho_2 \rightarrow \infty$ . Ist  $n = 0$ , dann ist

$$(24) \quad \int e^{-z} \cdot dz,$$

erstreckt über die positiv imaginäre Achse, gleich

$$i \int_0^{\infty} (\cos z' - i \cdot \sin z') dz',$$

erstreckt über die reelle  $z'$ -Achse; dies ist verschieden von dem über die positiv reelle  $z$ -Achse erstreckten Integral (24). Desgleichen darf im allgemeinen auch für  $n > 0$  die Integration über die positiv imaginäre Achse in (22) nicht ersetzt werden durch diejenige über die positiv reelle Achse.

Betrachten wir zunächst konvexe Zylinderflächen mit der zur Mantellinie normalen Schnittkurve

$$(25) \quad q = k A = |k \xi|^m.$$

Dann ist nach (19)

$$(26) \quad k \cdot d\sigma = h \cdot \sqrt{m^{-2} q^{-\frac{2(m-1)}{m}} + 1} \cdot dq.$$

Wie Möbius berücksichtigt wir nur die kleinste Potenz von  $q$ . Dann wird aus (26)

$$\text{für } \frac{m-1}{m} < 0, \text{ d. h. } 0 < m < 1 \quad k \cdot d\sigma = h \cdot dq;$$

$$\text{für } \frac{m-1}{m} = 0, \text{ d. h. } m = 1 \quad k \cdot d\sigma = h \sqrt{2} \cdot dq;$$

$$\text{für } \frac{m-1}{m} > 0, \text{ d. h. } m > 1 \quad k \cdot d\sigma = \frac{h}{m} \cdot q^{-\frac{m-1}{m}} \cdot dq.$$

Daher wird nach (18)

$$(27) \quad \delta_x = \arg i \int_0^{kD} e^{-iq} \cdot dq \quad \text{für } 0 < m \leq 1;$$

$$(28) \quad \delta_x = \arg i \int_0^{kD} q^{-\frac{m-1}{m}} \cdot e^{-iq} \cdot dq \quad \text{für } m > 1.$$

Ich betrachte zunächst  $m > 1$  und setze  $iq = z$ ; dann wird

$$\delta_x = \arg i \cdot i^{-\frac{1}{m}} \int_0^{ikD} z^{-\frac{m-1}{m}} \cdot e^{-z} \cdot dz.$$

Hier ist vom Nullpunkt aus über ein Stück der positiv imaginären  $z$ -Achse zu integrieren. Wie oben gezeigt, kann dafür im Grenzfall  $kD = \infty$  über die positiv reelle Achse integriert werden. Dieser Grenzfall ist um so mehr angenähert, je größer  $m$  und je größer  $kD$ , d. h. je größer die Blende ist. In diesem Grenzfall wird somit

$$\delta_x = \arg i^{\frac{m-1}{m}},$$

wobei dessen kleinster positiver Wert zu nehmen ist<sup>1)</sup>, also

$$(29) \quad \delta_x = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{m-1}{m}.$$

1) Der Vektor

$$\int_0^{\infty} q^{-\frac{m-1}{m}} \cdot e^{-iq} \cdot dq$$

liegt für  $m > 1$  im 3. oder 4. Quadranten; denn sein Imaginärteil ist negativ, weil

$$\int_0^{\infty} q^{-\frac{m-1}{m}} \cdot \sin q \cdot dq$$

positiv ist. Daher muß nach (28)  $\delta_x$  im 1. oder 4. Quadranten liegen. Für  $m = 2$  liegt kein Zweig von  $i^{\frac{m-1}{m}}$  im 4. Quadranten; hier ist die Bedingung, daß der kleinste positive Wert von  $\arg i^{\frac{m-1}{m}}$  zu nehmen ist, richtig. Für andere  $m$  folgt diese Bedingung daraus aus physikalischen Stetigkeitsgründen.

Möbius hat nur die Fälle  $m = \frac{4}{3}$ ; 2; 3 und 4 behandelt. Wenn  $m \leq 1$  ist, wird nach (27)

$$(30) \quad \delta_x = \arg(1 - e^{-ikD}) = \frac{\pi}{2} - \frac{kD}{2} + \pi \left[ \frac{kD}{2\pi} \right].$$

(29) und (30) bedeuten, daß die Phasen-anomalie bei Zylinderwellen, die durch (25) gegeben sind, sich dann, wenn der Aufpunkt längs der Achse unendlich weit wegläuft, im Fall  $m > 1$  einem bestimmten, im wesentlichen nur von der Wellenfläche abhängigen Wert nähert, während im Falle  $m \leq 1$  auch die Blendengröße eine wesentliche Rolle spielt.

Betrachten wir nun eine Fläche, die durch Rotation der durch (25) gegebenen Kurve um die zur  $\xi$ -Achse senkrechte Gerade entsteht, dann ist

$$k^2 \cdot d\sigma = 2\pi q^{\frac{1}{m}} \sqrt{m^{-2} q^{-\frac{2(m-1)}{m}} + 1} \cdot dq.$$

Berücksichtigt man nur die kleinste Potenz in  $q$ , dann wird

$$k^2 \cdot d\sigma = 2\pi q^{\frac{1}{m}} \cdot dq \quad \text{für } 0 < m < 1;$$

$$k^2 \cdot d\sigma = 2\sqrt{2}\pi q^{\frac{1}{m}} \cdot dq \quad \text{für } m = 1;$$

$$k^2 \cdot d\sigma = \frac{2\pi}{m} q^{-\frac{m-2}{m}} \cdot dq \quad \text{für } m > 1.$$

Wenn  $m \leq 1$  ist, wird

$$\delta_x = \arg i \int_0^{kD} q^{\frac{1}{m}} \cdot e^{-iq} \cdot dq.$$

Ich untersuche diesen Fall nicht näher. Ist  $m > 1$ , dann wird

$$\delta_x = \arg i \int_0^{kD} q^{-\frac{m-2}{m}} \cdot e^{-iq} \cdot dq.$$

Wenn hier weiter  $m > 2$  ist, dann kann dieser Fall wegen  $-\frac{m-2}{m} < 0$  wie oben der Fall  $m > 1$  der Zylinderwellen behandelt werden, und es wird

$$(31) \quad \delta_x = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{m-2}{m}.$$

Ist  $m = 2$ , dann wird

$$(32) \quad \delta_x = \arg i \int_0^{kD} e^{-iq} \cdot dq = \frac{\pi}{2} - \frac{kD}{2} + \pi \left[ \frac{kD}{2\pi} \right]$$



und nach (21)

$$(33) \quad \delta_v = \frac{\pi}{2} + \frac{kD}{2} - \pi \left[ \frac{kD}{2\pi} \right].$$

Ist die Wellenfläche eine Kugel vom Radius  $f$ , so kann sie dargestellt werden durch

$$2f\Delta - \Delta^2 = \xi^2.$$

Da nur die kleinste Potenz in  $q$ , bzw.  $\Delta$  berücksichtigt wird, wird daraus  $2f\Delta = \xi^2$ , woraus folgt

$$D = \frac{R^2}{2f}.$$

Dies in (33) eingesetzt, ergibt

$$\delta_v = \frac{\pi}{2} + \frac{kR^2}{4f} - \pi \left[ \frac{kR^2}{4\pi f} \right],$$

was auch aus (6) folgt, wenn man  $p = \infty$  setzt<sup>1)</sup>.

Möbius hat außer der Kugel bei den Rotationsflächen noch die Fälle  $m = \frac{4}{3}$ , 3 und 4 behandelt. Seine Ergebnisse für die beiden letztern ( $m > 2$ ) sind richtig, während für  $m = \frac{4}{3}$  dies nicht zutrifft, weil dann (31) nicht gilt. Für  $m = \frac{4}{3}$  wird die Phasen-anomalie in unendlicher Entfernung ebenfalls wesentlich abhängig von der Blendengröße wie bei der Kugelwelle.

Denkt man sich die Blende, durch welche die Lichtwelle eintritt, im Unendlichen und die Kaustik im Endlichen, dann ist in Punkten weit vor der Kaustik die Phasen-anomalie  $\delta = \delta_x$ , weil von diesen Punkten aus die durch die Blende eintretende Wellenfläche konvex erscheint, während in Aufpunkten weit hinter der Kaustik  $\delta = \delta_v$  ist. Die Phasen-anomalie zwischen den Punkten weit vor und denen weit hinter der Kaustik beträgt daher  $\delta_v - \delta_x$ , was z. B. im Falle einer Kreiszylinderwelle nach (29) ( $m = 2$ )  $\frac{\pi}{2}$  ergibt.

Betrachten wir das Verhältnis zwischen (31), gültig für  $m > 2$ , und (32), gültig für  $m = 2$ . Habe ich eine Wellenfläche mit großem  $m$ , dann berechnet sich nach (31)  $\delta_x$  mit einer gewissen Genauigkeit. Deformiere ich die Wellenfläche so, daß  $m$  stetig abnimmt, dann muß ich, damit sich  $\delta_x$  nach (31) mit konstanter von  $m$  unabhängiger Genauigkeit ergibt, die Blendenöffnung mit abnehmendem  $m$  vergrößern, weil ja (31) desto ungenauer wird, je kleiner  $m$  ist, und desto genauer  $\delta_x$  annähert, je größer die Blende ist. Deformiere ich

1) Setzt man in (31), was nur für  $m > 2$  gilt,  $m = 2$ , dann wird für die Kugelwelle  $\delta_x = 0$  und  $\delta_v = \pi$ ; also wäre danach die Phasen-anomalie gleich  $\pi$  für eine konvergente Kugelwelle.

so weit, daß  $m$  nach 2 geht, dann muß ich die Größe der Blende nach Unendlich konvergieren lassen, und für diesen Grenzfall ergibt sich nach (31)  $\delta_x = 0$ . (32) hingegen gilt für  $m = 2$  und endliche Blendenöffnung. Für eine unendliche Blendengröße ergibt sich nach (32) für  $m = 2$  ein unbestimmter Wert für  $\delta_x$ , so daß wenigstens kein Widerspruch zwischen den beiden Formeln besteht.

Vergleichen wir nun noch die theoretischen Berechnungen mit den Experimenten. Von Zeeman<sup>1)</sup> wurde festgestellt, daß die Mitte der Interferenzringe der sich überlagernden beiden Kugelwellen mit verschiedenen Brennpunkten an jedem Brennpunkt von hell nach dunkel oder umgekehrt umschlägt, während sich theoretisch ergab, daß bei einer Kreisblende  $\delta$  nicht nur in der Nähe, sondern auch in größerer Entfernung vom Brennpunkt beträchtliche Schwankungen ausführt.

Man<sup>2)</sup> habe zwei Kugelwellen gleicher Wellenlänge, gleicher Ausbreitungsrichtung, mit den Brennweiten  $f_1$  und  $f_2$ , mit der Phasendifferenz  $\zeta$  in der Blende und den Phasenanomalien  $\delta_1$  und  $\delta_2$ ; sie seien entstanden aus einer einzigen linear polarisierten Welle durch Passieren einer doppelbrechenden Linse und seien daher senkrecht zueinander linear polarisiert. Dann ist die Interferenzerscheinung längs der Achse hinter einem Analysator, dessen Durchlaßrichtung den Winkel zwischen den beiden Polarisationsrichtungen halbiert und auf der Durchlaßrichtung des vor der Linse befindlichen Polarisators senkrecht steht, gegeben durch

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} I &= \frac{2 A_1^2 f_1^2}{(f_1 - p)^2} \sin^2 \frac{Q_{(1)}}{2} + \frac{2 A_2^2 f_2^2}{(f_2 - p)^2} \sin^2 \frac{Q_{(2)}}{2} \\ &- \frac{4 A_1 A_2 f_1 f_2}{(f_1 - p)(f_2 - p)} \sin \frac{Q_{(1)}}{2} \cdot \sin \frac{Q_{(2)}}{2} \cdot \cos \left( \frac{Q_{(2)} - Q_{(1)}}{2} - \zeta \right), \end{aligned} \right.$$

wobei  $I$  die Lichtintensität,  $A_1$  und  $A_2$  Amplitudenfaktoren sind und entsprechend (4)

$$Q_{(1)} = \frac{k R^2}{2} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{f_1} \right), \quad Q_{(2)} = \frac{k R^2}{2} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{f_2} \right)$$

ist. Denkt man sich an Stelle der doppelbrechenden Linse eine gewöhnliche, dann ist  $A_1 = A_2$ ,  $f_1 = f_2$ ,  $\zeta = 0$  und nach (34)  $I = 0$ , da durch die beiden aufeinander senkrechten Nikols das Licht vollständig ausgelöscht wird. Ist  $\Delta p$  die Entfernung zweier Aufpunkte, an denen aufeinander folgende Minima einer Kugelwelle liegen, so ist

$$\Delta p = \frac{2 \lambda p^2}{R^2}.$$

1) P. Zeeman, Phys. Ztschr. 1. S. 542. 1900.

2) Vgl. H. W. Breuninger, a. a. O., S. 36–42.

Für  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$  cm,  $p = 33$  cm und  $R = 1,4$  cm (Zeemanscher Versuch) wird  $\Delta p = 0,06$  cm. Sind nun im Experiment die Brennpunkte nicht ganz scharf, dann sind die Extremalstellen der Intensität etwas verwaschen, und man wird bei diesem kleinen  $\Delta p$  nur einen Mittelwert der Intensität wahrnehmen. Dieser ergibt sich zu

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{I} &= \frac{A_1^2 f_1^2}{(f_1 - p)^2} + \frac{A_2^2 f_2^2}{(f_2 - p)^2} \\ &- \frac{2 A_1 A_2 f_1 f_2}{(f_1 - p)(f_2 - p)} \cdot \cos \frac{Q_{(2)} - Q_{(1)}}{2} \cdot \cos \left( \frac{Q_{(2)} - Q_{(1)}}{2} - \zeta \right), \end{aligned} \right.$$

wobei diese Formel nicht in der Umgebung der Brennpunkte gilt. Um hierin im Falle des Zeemanschen Versuches

$$(36) \quad \cos \frac{Q_{(2)} - Q_{(1)}}{2} \cos \left( \frac{Q_{(2)} - Q_{(1)}}{2} - \zeta \right)$$

berechnen zu können, müßte bei einem bestimmten  $\zeta$  der Radius  $R$  genauer als auf 0,1 % bekannt sein. Um daher einen Überblick zu bekommen, was theoretisch beim Versuch von Zeeman zu erwarten ist, sind unter der Annahme  $A_1 = A_2 = 1$  fünf Kurven  $a, b, c, d, e$  (Abb. 5) berechnet worden, welche für einen Wert des Produktes (36) von bzw.

$$-1, -\frac{1}{2}, 0, +\frac{1}{2}, +1$$

gelten. Kurve  $c$  gibt die Intensität, die bei reiner Addition der Intensitäten der beiden Kugelwellen entsteht.  $a$  und  $b$  verlaufen vor dem ersten und hinter dem zweiten Brennpunkt oberhalb von  $c$ , zwischen beiden Brennpunkten

unterhalb von  $c$ . Dies besagt, daß bei  $a$  und  $b$  vor dem ersten und hinter dem zweiten Brennpunkt relativ Helligkeit und zwischen beiden Brennpunkten Dunkelheit herrscht; das Umgekehrte gilt für  $d$  und  $e$ . Die Ursache liegt darin, daß an den Brennpunkten das dritte Glied der rechten Seite von (35) das Vorzeichen umkehrt. Der Grund dafür ist folgender: Beide Wellen haben an jedem Minimum ihrer Amplituden einen Phasensprung  $\pi$ . Diese Minima sind nach (5) bestimmt durch  $Q = 2n\pi$  mit ganzem positivem oder negativem  $n$ . Im Brennpunkt ist  $n = 0$ ; daher entspricht dieser einer Minimalstelle; hier findet aber kein Phasensprung statt, weil

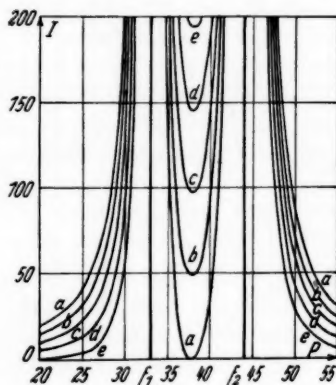


Abb. 5

die Amplitude von Null verschieden ist. Daher ist die durchschnittliche Phasen-anomalie einer Welle hinter ihrem Brennpunkt um  $\pi$  größer als davor; da nun im Falle des Zeemanschen Versuches nur eine durchschnittliche Phasen-anomalie beobachtet werden kann, hat es den Anschein, als ob am Brennpunkt eine Phasen-umkehr stattfindet.

Anders als bei Zeeman liegen die Versuchsbedingungen bei Sagnac. Hier ist  $f_1 = 200$  cm und  $f_2 = 300$  cm. Nach (5) liegen daher  $\left[ \frac{R^2}{2\lambda} \left( \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} \right) \right] = 2$  Minima einer jeden Welle zwischen den Brenn-

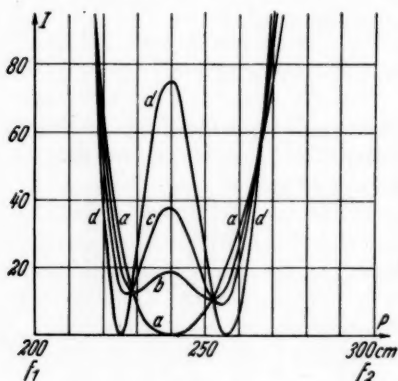


Abb. 6

punkten, wenn  $R = 0,4$  cm und  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$  cm ist. Abb. 6 gibt unter der Voraussetzung

$$A_1 = A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ vier nach (34)}$$

berechnete Kurven  $a, b, c, d$  für diesen Sagnacschen Fall, wobei  $\zeta$  bzw.  $= 120^\circ, 60^\circ, 30^\circ, -60^\circ$  gesetzt ist. Überall sind 2 Minima, ausgenommen  $a$ , wo beide zusammenfallen. Dies stimmt im großen überein mit der Angabe von Sagnac<sup>1)</sup>, daß er zwischen den beiden Brennpunkten 4 mal einen

beinahe plötzlichen Wechsel der Intensität von hell nach dunkel oder umgekehrt beobachtet habe.

Zum Schluß fassen wir die Eigenschaften der Phasen-anomalie  $\delta$ , die beim Ausblenden einer konvergenten Kugelwelle auftritt, zusammen<sup>2)</sup>:

#### a) Kreisblende

Längs der Achse durchpendelt  $\delta$  mit veränderlichem Abstand von der Blende ein Winkelintervall, das selbst vom Abstand von der Blende (bzw. vom Abstand vom Brennpunkt) abhängig ist und dessen Mitte vor dem Brennpunkt sich um  $\pi$  von der Mitte hinter dem Brennpunkt unterscheidet.

Die Breite dieses Intervalles beträgt in Brennpunktsnähe  $\pi$ . Mit zunehmender Entfernung vom Brennpunkt schrumpft es zusammen.

1) G. Sagnac, Compt. rend. 138. S. 620. 1904.

2) Vgl. H. W. Breuninger, a. a. O. S. 42—45.

Diese Zusammenschrumpfung geht vor dem Brennpunkt bei Annäherung an die Blende nur so weit, daß die Intervallbreite in der Nähe der Blende noch mindestens  $\pi/3$  beträgt. Hinter dem Brennpunkt schrumpft das Intervall auch etwas zusammen. Während aber vor dem Brennpunkt  $\delta$  praktisch unendlich oft pendelt, geschieht das bei im Endlichen gelegener Blende nur endlich oft hinter dem Brennpunkt.

Bei Verlegung der Blende ins Unendliche schrumpft das von  $\delta$  durchpendelte Intervall längs der Achse nicht zusammen (vgl. Abb. 2).

Gleichgültig, ob daher die Blende im Endlichen oder Unendlichen liege, gibt es keine so große Entfernung  $E$ , daß zwischen den Achsenpunkten einerseits, die in einer Entfernung größer als  $E$  vor dem Brennpunkt liegen, und den axialen Punkten andererseits, die in einem  $E$  übertreffenden Abstand hinter dem Brennpunkt sind, stets annähernd die Phasen-anomalie gleich  $\pi$  sei. Daher lassen sich die Zeemanschen Experimente nicht mit der obigen Phasen-anomalie allein erklären, sondern die scheinbare Phasen-anomalie  $\pi$  am Brennpunkt kommt nur dadurch zustande, daß 2 Kugelwellen mit verschiedenen Brennpunkten sich überlagern. Die durch ihren Brennpunkt gehende Kugelwelle läßt hier einen sonst periodisch aufgetretenen Phasensprung  $\pi$  einmal ausfallen, so daß sich die durchschnittliche Phasen-anomalie hinter dem Brennpunkt von demselben Wert vor dem Brennpunkt um  $\pi$  unterscheidet.

$\delta$  längs nichtaxialen Strahlen geht stetig aus dem Verhalten längs der Achse hervor. Denn für einen nichtaxialen Strahl gibt es zwar eine Strecke  $E$  derart, daß zwischen den Punkten vor dem Brennpunkt in einer Entfernung größer als  $E$  einerseits und den Punkten andererseits, die hinter dem Brennpunkt in einer  $E$  übertreffenden Entfernung liegen, annähernd die Phasen-anomalie  $\pi$  besteht.  $E$  muß aber desto größer sein, je kleiner der Winkel zwischen dem Strahl und der Achse ist, und wird unendlich, wenn diese beiden zusammenfallen. Das von  $\delta$  durchpendelte Intervall schrumpft längs nichtaxialen Strahlen auch zusammen, wenn die Blende im Unendlichen liegt, was in diesem Fall längs der Achse nicht mehr eintritt. Man darf daher annehmen, daß, ob die Blende im Endlichen oder Unendlichen liegt, das von  $\delta$  durchpendelte Intervall längs einem Strahl desto rascher mit der Entfernung vom Brennpunkt zusammenschrumpft, je größer der Winkel zwischen Achse und Strahl ist. Dies stimmt damit überein, daß in Brennpunktsnähe in einer Entfernung  $r_1$  vom Brennpunkt nach (17) nahezu dasselbe  $\delta$  gilt wie in einer Entfernung  $r_2$  auf der Achse, wobei  $r_2 - r_1$  desto größer ist, je größer der Winkel zwischen Strahl und Achse ist,

was vermutlich auch noch in größeren Entfernungen vom Brennpunkt richtig ist.

Bei im Endlichen gelegener Blende wird bei endlicher Ausdehnung der Lichtquelle die Lichtschwingung in einem axialen Punkte  $P$  nicht genau gleich der unter Voraussetzung punktförmiger Lichtquelle berechneten Größe, sondern gleich dem Durchschnittswert der für die Punkte eines in  $P$  senkrecht zur Achse stehenden Flächenelementes berechneten Lichtschwingungen. Da nach oben ausgesprochener Vermutung die Phase in achsenbenachbarten Punkten gleich der Phase in etwas weiter vom Brennpunkt weg liegenden Achsenpunkten ist, kann die Mittelwertbildung über ein Flächenelement senkrecht zur Achse ersetzt werden durch die Mittelwertbildung über ein gewisses Längenelement der Achse. Je größer das Bild der Lichtquelle in der Brennebene, gemessen durch den Winkel, unter dem es vom Blendenmittelpunkt aus erscheint, im Verhältnis zur Blendenöffnung ist, desto länger ist das Achsenstück, über das gemittelt werden muß, um die Lichtschwingung in  $P$  zu erhalten. Man sieht so, wie durch Vergrößerung der Lichtquelle die axiale Interferenzerscheinung mehr und mehr verschwommen wird.

b) Rechtecksblende

Hier konvergiert  $\delta$  auch längs der Achse in großen Entfernungen vor und hinter dem Brennpunkt nach 0 bzw.  $\pi$ .

Neustrelitz, Friedrich-Wilhelm-Str. 3.

(Eingegangen 7. März 1939)

## **Messungen von elektrischen Anregungsfunktionen an Quecksilber<sup>1)</sup>**

**Von Pascal Vetterlein**

(Aus dem Physikalischen Institut der Technischen Hochschule Hannover)

(Mit 15 Abbildungen)

Inhalt: § 1. Problemstellung. — § 2. Grundsätzliches zur Methode. —  
§ 3. Beschreibung der Apparatur. — § 4. Auswertung und Fehlerquellen. —  
§ 5. Meßergebnisse. — Zusammenfassung.

### **§ 1. Problemstellung**

Bei der Untersuchung der Ausbeute unelastischer Stöße zwischen Elektronen und Atomen kann man von zwei wesentlich verschiedenen Gesichtspunkten ausgehen: Man kann einmal die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen nach Durchlaufen des Stoßraumes untersuchen und findet die *Ausbeute für die Anregung bestimmter Atomterme*, man kann zweitens die Intensität der infolge der Stöße emittierten Spektrallinien messen und findet die *Ausbeute für die Emission bestimmter Lichtquanten*. Die quantitative Beschreibung der Ausbeute erfolgt dadurch, daß dem betreffenden Ereignis, also der Anregung eines Terms — bzw. der Emission eines bestimmten Lichtquants — in bekannter Weise ein Wirkungsquerschnitt zugeordnet wird. Diese Wirkungsquerschnitte für die Anregung eines Terms bzw. für die Anregung einer Linie hängen sehr wesentlich von der Energie der stoßenden Elektronen ab und werden — als Funktionen dieser Energie betrachtet — als Anregungsfunktionen bezeichnet. Man spricht, je nachdem es sich um die Anregung eines Terms oder um die Emission einer Linie handelt, von elektrischen bzw. optischen Anregungsfunktionen.

Fraglos geben die elektrischen Anregungsfunktionen unmittelbare Aussagen über die Eigenschaften des Atoms als die optischen Anregungsfunktionen. Denn in die letzteren geht im allgemeinen infolge der Kaskadensprünge außer der elektrischen Ausbeute für alle Terme auch die Verteilung der Übergangswahrscheinlichkeiten

1) D 89.



in komplizierter Weise ein, so daß nicht ohne weiteres von der optischen Anregungsfunktion auf die elektrische Anregungsfunktion geschlossen werden kann. Trotzdem sind optische Anregungsfunktionen in einem ungleich größeren Umfang gemessen als elektrische Anregungsfunktionen, bei denen sich das Material auf ganz wenige Messungen beschränkt. Das ist fraglos darauf zurückzuführen, daß die Messung der elektrischen Anregungsfunktionen nach den bisher benutzten Methoden auf weit größere Schwierigkeiten stößt, als die Messung optischer Anregungsfunktionen. Eine Verbesserung der Methoden zur Messung elektrischer Anregungsfunktionen schien deshalb von wesentlicher Bedeutung.

Zur Bestimmung des Wirkungsquerschnitts muß die Geschwindigkeitsverteilung gemessen werden, mit der die Elektronen den Stoßraum verlassen. Für die Messung der Geschwindigkeitsverteilung stehen grundsätzlich zwei Möglichkeiten zur Verfügung: Man kann *erstens* den aus dem Stoßraum austretenden Elektronenstrahl durch elektrische oder magnetische Felder räumlich in ein Geschwindigkeitsspektrum auseinanderziehen, *zweitens* kann man die Geschwindigkeitsverteilung dadurch bestimmen, daß man die austretenden Elektronen gegen ein variables Gegenfeld anlaufen läßt. Die Messung im Gegenfeld bietet vor der spektralen Zerlegung in verschiedener Hinsicht wesentliche Vorteile (größere Einfachheit und Durchsichtigkeit der Anordnung, bessere Ausnutzung der aus dem Stoßraum austretenden Elektronen). Aus anderen Gründen sind jedoch der Verwendung der Gegenspannungsmethode bei der Bestimmung von Wirkungsquerschnitten enge Grenzen gesetzt. Denn die Berechnung der Wirkungsquerschnitte aus der gemessenen Geschwindigkeitsverteilung ist um so sicherer, je größer die freie Weglänge der Elektronen im Vergleich zu der im Stoßraum durchlaufenen Strecke ist, je geringer also der Anteil der Elektronen wird, die Energieverluste erlitten haben. Nun wird aber die Ausbeute bei der Gegenfeldmessung als Differenz zweier Ströme gemessen, und dadurch wird die erreichbare Meßgenauigkeit um so kleiner, je besser im Stoßraum die Bedingungen für die Sicherheit der rechnerischen Auswertung der Messung realisiert werden. In der vorliegenden Arbeit wird eine Modifikation der Gegenspannungsmethode entwickelt, die diese Schwierigkeit ausschaltet und die Empfindlichkeit der Messung wesentlich erhöht, ohne daß die oben erwähnten Vorzüge der Gegenspannungsmethode dadurch berührt werden.

Die neue Methode wird an Quecksilber erprobt, weil sich dort neben neuen Resultaten Vergleichsmöglichkeiten mit früheren Messungen ergeben.



## § 2. Grundsätzliches zur Methode

Die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen, die pro Zeiteinheit den Stoßraum verlassen, wird beschrieben, indem der Teil der pro Zeiteinheit aus dem Stoßraum austretenden Elektronen, der auf den Geschwindigkeitsbereich  $\Delta V$  entfällt, gleich  $N(V) \Delta V$  gesetzt wird. Befindet sich in dem Stoßraum ein Gas, so wird die Funktion  $N(V)$  einen Verlauf zeigen, wie ihn in schematischer Form Abb. 1 wiedergibt. Dabei ist  $V_0$  die Geschwindigkeit, mit der die Elektronen in den Stoßraum eintreten. Es ist ferner der Einfachheit halber angenommen, daß nur eine Art von unelastischen Zusammenstößen (mit Energieverlust  $V_0 - V_1 = U_1$ ) stattfinden kann.

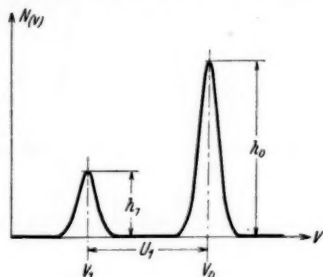


Abb. 1

Die Flächeninhalte  $F_0$  und  $F_1$  unter den beiden Maxima sind gleich der Zahl der Elektronen, die pro Zeiteinheit ohne Energieverlust bzw. mit Energieverlust aus dem Stoßraum austreten. Die Form ist bei beiden Maxima nur durch die Geschwindigkeitsverteilung bedingt, mit der die Elektronen in den Stoßraum eintreten, und ist deshalb bei beiden Maxima die gleiche. Deshalb gilt für das Verhältnis  $\frac{F_1}{F_0 + F_1}$ , das zusammen mit der Gasdichte und Stoßraumlänge den Wirkungs-Querschnitt bestimmt,

$$\frac{F_1}{F_0 + F_1} = \frac{h_1}{h_0 + h_1},$$

wo  $h_0$  und  $h_1$  die Höhen der beiden Maxima sind.

Bei den üblichen Gegenspannungsmethoden bestimmen wir nun aber nicht für jedes  $V$  den entsprechenden  $N(V)$ -Wert, sondern wir erhalten für jede Gegenspannung  $V$  den Summenwert aller Elektronen, deren Geschwindigkeit ausreicht, um gegen das Gegenfeld anzulaufen, also aller Elektronen, deren Geschwindigkeit  $\geq V$  ist. Für den an der Stelle  $V$  gemessenen Stromwert  $I$  kann man also schreiben

$$I = \int_V^{\infty} N(V) dV.$$

Die Gegenspannungskurve ist somit die Integralkurve der gesuchten Geschwindigkeitsverteilungskurve. Die der oben gezeichneten Ver-

teilungskurve entsprechende Gegenspannungskurve würde durch Abb. 2 wiedergegeben werden.  $I_0$  und  $I_1 - I_0$  sind identisch mit den Integralen über die entsprechenden Maxima der Kurve  $N(V)$ , also mit  $F_0$  und  $F_1$ . Die Gegenspannungsmethode liefert uns also auch den zur Berechnung des Wirkungsquerschnitts notwendigen Quotienten

$$\frac{F_1}{F_0 + F_1} = \frac{I_1 - I_0}{I_1},$$

liefert aber die Ausbeute als Differenz zweier Ströme. Dadurch wird die Genauigkeit der Messung bei kleinen Ausbeuten außerordentlich begrenzt.

Ich habe deshalb auf Vorschlag von H. Bartels unter Ver-

wendung eines Gedankens, der in anderem Zusammenhang von Dymond<sup>1)</sup> angewendet war, die Gegenspannungsmethode so modifiziert, daß  $N(V)$  unmittelbar gemessen wird. Kleinheit der Ausbeute kann jetzt im Gegensatz zur alten Gegenspannungsmethode grundsätzlich durch Steigerung der Empfindlichkeit ausgeglichen werden.

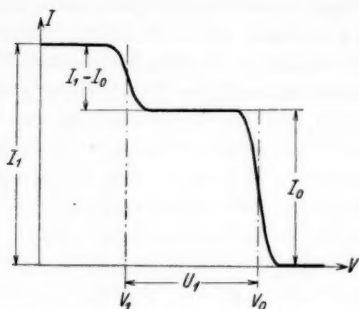


Abb. 2

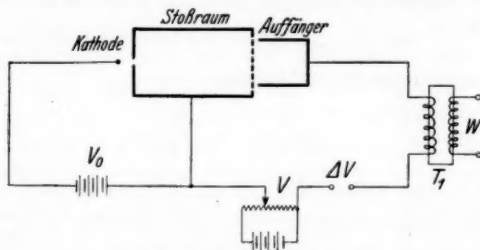


Abb. 3. Prinzip der Schaltung

Da überdies  $N(V)$  durch eine Wechselspannungsamplitude gemessen wird, so ist es weiterhin möglich, die moderne Verstärkungstechnik zur Steigerung der Empfindlichkeit einzusetzen. Die Grenzen der Genauigkeit sind jetzt lediglich durch Störeffekte gegeben.

Der neuen Methode liegt folgender Gedankengang zugrunde: Der Gegenspannung  $V$  in der üblichen Gegenspannungsmethode wird eine kleine Wechselspannung  $\Delta V$  überlagert (vgl. Abb. 3).

1) E. G. Dymond, Proc. of the Royal Soc. Ld. A 167. S. 291. 1925.

Ohne diese Wechselspannung erhalten wir für jeden Wert von  $V$  den der Gegenspannungscharakteristik entsprechenden Gleichstrom  $I$ . Nach Einschalten der Wechselspannung  $\Delta V$  schwankt der Auffängerstrom  $I$  um den Betrag  $\Delta I$ , der der Differenz  $\Delta V$  auf der

Gegenspannungscharakteristik entspricht (vgl. Abb. 4). Macht man  $\Delta V$  klein genug, so ist die Amplitude des Wechselstroms  $\Delta I$ , der sich dem Gleichstrom  $I$  überlagert, bis auf einen von  $V$  unabhängigen Faktor gleich der Steigung der Gegenspannungscharakteristik. Variiert man also  $V$  bei festgehaltenem  $\Delta V$ , so durchfließt die Primärseite des Transformators  $T_1$  (vgl. Abb. 3) ein Wechselstrom, dessen Amplitude bis auf einen von  $V$  unabhängigen Faktor gleich der Geschwindigkeitsverteilungsfunktion  $N(V)$  ist, wenn man von den Fehlern absieht, die dadurch entstehen, daß  $\Delta V$  endlich bleiben muß, und der Grenzübergang  $\Delta V \rightarrow 0$  nicht vollzogen wird.

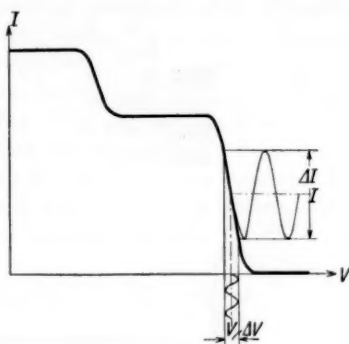


Abb. 4

Dieser Wechselstrom, durch den  $N(V)$  gemessen wird, kann so verstärkt werden, daß er mit relativ groben Instrumenten schneller Einstelldauer gemessen werden kann, so daß unter Zuhilfenahme einer später beschriebenen Potentiometeranordnung eine Meßreihe in sehr kurzer Zeit aufzunehmen ist.

### § 3. Beschreibung der Apparatur

Das Vakuumgefäß, in dem die Stoßanordnung untergebracht war, bestand, wie Abb. 5 zeigt, aus vier Schliften, die kreuzförmig miteinander verblasen waren. In einen Schliff wurde die eigentliche Stoßanordnung eingeführt, der gegenüberliegende diente zur Herstellung elektrischer Anschlüsse. Der dritte Schliff verband die Anordnungen mit der Pumpe, an den vierten wurde ein kleines Vorratsgefäß mit Quecksilber, das mit Wasserkühlung und Thermometer versehen war, angeschlossen.

Die eigentliche Stoßapparatur wird in Abb. 6 gezeigt. Die einzelnen Teile bestanden aus Messing. Das Messingrohr  $M_1$  wurde in der gezeichneten Weise durch eine wassergekühlte Kittstelle mit einem Schliffkern verbunden und in den einen Schliff des oben beschriebenen Vakuumgefäßes eingeführt.  $M_1$  bildete nun den Träger

der gesamten Stoßanordnung. Das darüber geschobene Messingrohr  $M_1$  enthielt Kathode (in Abb. 6 nicht eingezeichnet, Beschreibung weiter

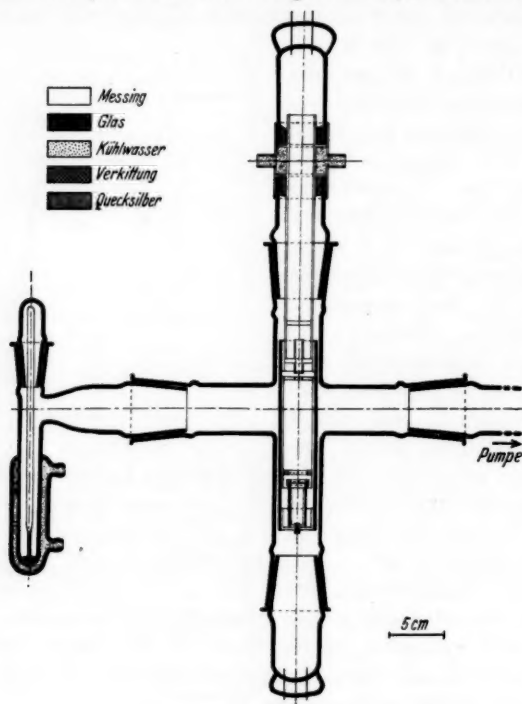


Abb. 5. Gesamtanordnung

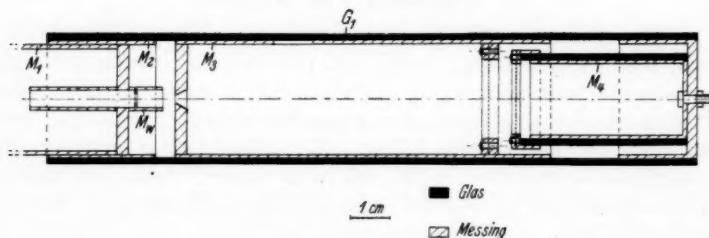


Abb. 6. Stoßanordnung

unten) und den zur Bündelung der Elektronen dienenden Wehnelt-Zylinder  $M_w$ . Über  $M_2$  wurde ein Glaszylinder  $G_1$  geschoben, der genau zentrierend das Rohr  $M_3$  hielt, das den Stoßraum bildete.  $M_3$  wurde zur Kathode hin durch eine Platte mit zentraler Bohrung,

der Eintrittsöffnung für die Elektronen, nach der anderen Seite hin durch ein Netz aus Al-Draht von 0,06 mm Durchmesser und 1,2 mm Maschenweite abgeschlossen. Diesem Netz folgte ein zweites von gleichen Abmessungen und schließlich der ebenfalls durch das Glasrohr  $G_1$  zentrierte Auffänger. Dieser bestand aus einem Messingrohr  $M_1$ , das in gezeichneter Weise durch einen Boden abgeschlossen war. Das zweite Netz wurde durch das Glasrohr  $G_2$  vom Auffänger zentriert und gehalten. Die inneren Teile der Messingrohre waren zur Vermeidung von Elektronenreflektionen berußt.

Die Konstruktion der Kathode ist aus Abb. 7 zu ersehen. Die Kathode bestand aus einem Platindraht von 0,2 mm Durchmesser. Die Emissionsstelle wurde dadurch gebildet, daß der Draht in der

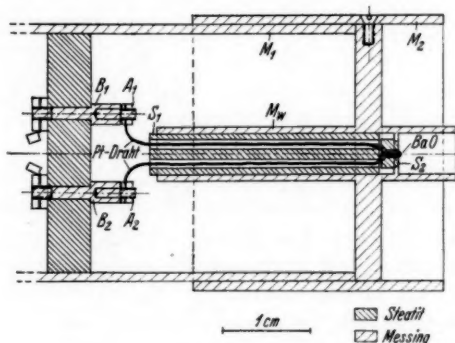


Abb. 7. Konstruktion der Kathode

Mitte verdreht, die Verdrehungsstelle im Gebläse verschweißt und die äußerste Spitze mit einer Spur Bariumoxyd überzogen wurde. (Bariumoxyd wurde mit Wasser zu einem dünnen Brei angerieben, auf den Platindraht aufgebracht und neben der Flamme eines Bunsenbrenners getrocknet.) Der Draht wurde dann in das Steatitrohr  $S_1$  eingeführt, die Oxydstelle durch die Bohrung der Steatitkappe  $S_2$  geführt und das Ganze in der gezeichneten Weise in den Wehneltzylinder  $M_w$  geschoben. Zur Stromzuführung dienten zwei Stecker  $A_1$  und  $A_2$  an den Enden des Platindrahtes und zwei Buchsen  $B_1$  und  $B_2$  in der Steatitplatte  $S_3$ .

Bei der Konstruktion von Kathode-Stoßraum-Auffänger wurde besonderer Wert darauf gelegt, alle Teile leicht auswechseln zu können. Die Kathodenkonstruktion hatte daneben noch den Vorteil, durch die Form der Steatitröhre im Wehneltzylinder genau zentriert zu sein, während andererseits der Wehneltzylinder genau in der Achse

des Stoßraums und Auffängers lag. Die Emissionsstelle der Kathode wird nun durch Wärmeleitung geheizt und ist dadurch äquipotential, durch die Form der Verdrillungsstelle ist sie fast punktförmig.

Die elektrische Schaltung zeigt Abb. 8.

Die Batterie  $B_1$  lieferte einerseits die Beschleunigungsspannung für die in den Stoßraum eintretenden Elektronen, andererseits zusammen mit der vom Potentiometer  $P_4$  abgenommenen variierbaren

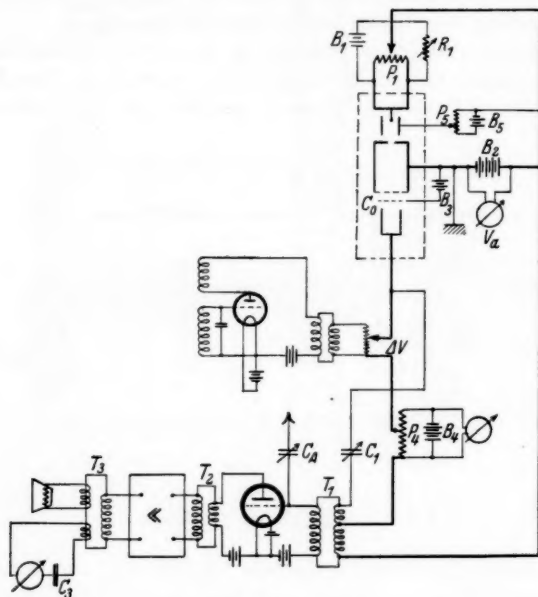


Abb. 8. Schaltungsschema

Spannung die Gegenspannung zwischen Stoßraum und Auffänger. Da die Gegenspannung nur um einen relativ geringen Bruchteil (etwa bis 14 Volt) gegenüber der Beschleunigungsspannung variiert wurde, konnten durch die angegebene Schaltung Fehler sehr gemindert werden, die dadurch entstehen können, daß sich die Gegenspannung und die Beschleunigungsspannung während der Messung gegeneinander verschieben. Der Wehneltzylinder erhielt durch die Batterie  $B_5$  eine negative Spannung gegenüber der Kathode, die durch das Potentiometer  $P_5$  geregelt wurde. Durch die Batterie  $B_3$  wurde dem Netz zwischen Stoßraum und Auffänger eine positive Spannung von etwa 10 Volt gegenüber dem Stoßraum gegeben, um

positive Ionen, die etwa im Stoßraum hätten entstehen können, nicht zum Auffänger gelangen zu lassen.

Die Schaltung des Potentiometers  $P$ , ist aus Abb. 9 zu ersehen: In den Potentiometerteilen  $P_a$  und  $P_b$  sind die Einzelwiderstände Präzisionswiderstände von je 1000 Ohm, im Potentiometer-teil  $P_c$  ebensolche Widerstände von je 100 Ohm. Es ist aus der Abbildung ohne weiteres ersichtlich, daß man die zwischen  $A$  und  $B$

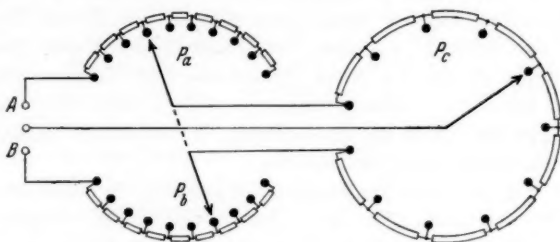


Abb. 9. Schaltung Potentiometer

liegende Spannung schrittweise von Hundertstel zu Hundertstel der Gesamtspannung durchlaufen kann, und zwar mit viel größerer Genauigkeit, als wenn man die Spannung jeweils mit einem Zeigerinstrument einstellen müßte. Außerdem erhöht die Regelung der Spannung mit dieser Sonderkonstruktion die Meßgeschwindigkeit erheblich, da das Ablesen der Spannung bei jeder neuen Potentiometereinstellung entfällt.

Zur Erzeugung der überlagerten Wechselspannung  $\Delta V$  diente ein Röhrengenerator, der durch einen Transformator mit der Apparatur gekoppelt wurde. Als zweckmäßigste Frequenz erwiesen sich 500 Hz. Die Amplitude der Spannung an der Apparatur betrug einige Zehntelvolt, sie ließ sich durch einen Spannungsteiler regeln.

Der Kondensator  $C_1$  kompensierte die Kapazität  $C_0$  zwischen Auffänger und Stoßraum, die in der Weise störend wirkte, daß auch dann eine Wechselspannung am Transformator  $T_1$  lag, wenn überhaupt kein Elektronenstrom floß, also die Steigung der Stufenkurve gleich Null war.

Über den Kondensator  $C_a$  wurde eine kleine Antenne an den Gitterkreis der Vorröhre angekoppelt. Durch diese Schaltung wurden die Störungsschwingungen kompensiert, die dadurch in den Verstärker gelangen, daß die eine Seite der Primärwicklung des Transformators  $T_1$  über die Batterie  $B_2$  geerdet, die andere Seite



jedoch mit den Metallmassen und Leitungen des Potentiometers  $P_4$ , des Röhrengenerators und Auffängers verbunden war. Die Störschwingungen, die durch das Lichtnetz usw. induziert werden, gelangen auch über die Antenne an das Gitter der Vorröhre, des Transformators wegen jedoch um  $180^\circ$  phasenverschoben, wodurch die Kompensation bei passender Einstellung von  $C_4$  erreicht wurde. Die von außen kommenden Störungen konnten zum größten Teil durch diese Maßnahme beseitigt werden. Doch ließ es sich nicht ganz vermeiden, daß im Ausgangsinstrument ein kleiner Reststrom verblieb, der teilweise aus dem Netzbrummen des Verstärkers, teilweise aus durch das Lichtnetz induzierten Störschwingungen (etwa 1000 Hz) herrührte. Dieser Reststrom war jedoch völlig konstant, im Lautsprecher leicht zu kontrollieren, er betrug den Maßstab der Kurvenbilder gemessen etwa 0,3 Skt.

Der Wechselstrom im Meßkreis  $W_N$  wurde in einem 3stufigen Verstärker verstärkt. Mit dem batteriebetriebenen Vorverstärker war durch Transformator ein Siemenskraftverstärker gekoppelt, der als Endstufe zwei Röhren RE 604 in Gegentakt hielt. Am Ausgangstransformator lag unter Zwischenschaltung einer Kapazität von  $0,5 \mu\text{F}$ , die das Netzbrummen herabdrücken sollte, ein Hartmann & Braun-Multavi-Instrument. Außerdem war ein Lautsprecher angeschlossen, der eine gute akustische Kontrolle gestattete.

Die Verstärkungsziffer der Verstärkeranlage war in weiten Grenzen konstant und zeigte erst bei sehr großen Werten der durch den Primärkreis von  $T_1$  fließenden Wechselströme ein leichtes Absinken. Um die Meßergebnisse sicher auswerten zu können, mußte zunächst die Eichkurve aufgenommen werden. Es wurden also durch die Primärseite des Transformators  $T_1$  Wechselströme bekannter Amplitude und gleicher Frequenz wie bei den eigentlichen Messungen geschickt und zu jeder Stromamplitude der zugehörige Ausschlag des Ausgangsinstrumentes abgelesen. Bei der Auswertung der Meßreihen wurde dann so vorgegangen, daß zu jedem Meßwert, d. h. Ausschlag des Ausgangsinstrumentes, aus dieser Eichkurve rückwärts die betr. Wechselstromamplitude im Meßkreis bestimmt und als  $W_N$  in willkürlichem Maßstab über der Gegenspannung aufgetragen wurde.

Der herrschende Dampfdruck wurde der Temperatur des Hg im Vorratsgefäß entnommen. Die Temperatur wurde mit einem Normalthermometer bestimmt und durch Wasserkühlung auf  $\pm 0,1^\circ \text{C}$  konstant gehalten. Der den abgelesenen Temperaturen entsprechende Dampfdruck wurde den Tabellen von Landolt-Börnstein entnommen.

## § 4. Auswertung und Fehlerquellen

Als typisches Beispiel für die im Quecksilberdampf aufgenommenen Geschwindigkeitsverteilungskurven zeigt Abb. 10 zwei Kurven, die bei 60 bzw. 380 Volt gemessen wurden. Als Abszisse ist die Gegenspannung  $V$  in Volt, als Ordinate der Wechselstrom  $W_N$  in einem willkürlichen Maßstab aufgetragen. Das Nullmaximum bei  $V = V_0$  ist der Übersichtlichkeit halber in allen Kurvenbildern gegenüber dem Verlustmaxima um ein Zwanzigstel verkleinert. Das Nullmaximum ist Nullpunkt für die Bestimmung der in Voltgeschwindigkeit gemessenen Energieverluste  $U$ . Diese Energieverluste  $U$  sind in einer neuen Skala mit dem Nullpunkt in  $V = V_0$  eingetragen.

Die Kurven in Abb. 10 zeigen, daß sich die einzelnen Verlustmaxima zum Teil schon merklich überlagern. Zur genauen Ermittlung des Wirkungsquerschnitts, der den einzelnen Verlusten zuzuordnen ist, mußte deshalb der Kurvenzug mit Hilfe der Anfangsgeschwindigkeitsverteilung, die ja die Form aller Maxima gleichmäßig bestimmt, in die einzelnen Verlustmaxima zerlegt werden. Das gelang ohne Mühe, da die Lage der einzelnen Maxima trotz der Störungen in allen Fällen gut erkennbar war. Die Anfangsgeschwindigkeitsverteilung wurde dem Nullmaximum entnommen.

Das Nullmaximum zeigt bei allen Messungen eine asymmetrische Verbreiterung nach wachsendem  $U$ . Wird der Hg-Dampf ausgefroren, verschwindet diese Asymmetrie völlig. Abb. 11 zeigt das Nullmaximum im Hg-Dampf und nach Ausfrieren. Beide Kurven wurden unmittel-

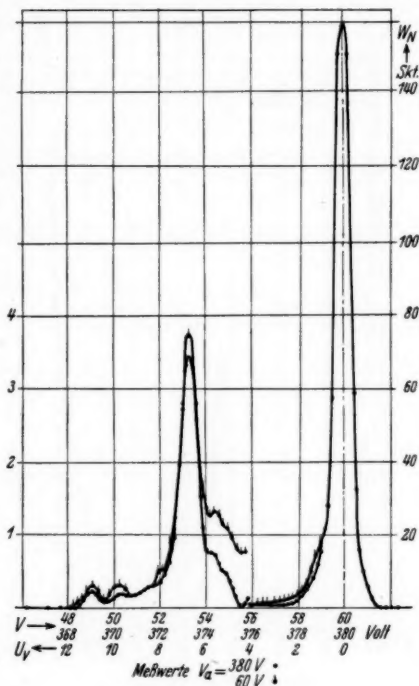


Abb. 10. Beispiel zweier gemessener Geschwindigkeitsverteilungskurven

bar nacheinander aufgenommen. Die Asymmetrie entsteht also dadurch, daß sich der völlig symmetrischen, nur durch die Anfangsgeschwindigkeitsverteilung bestimmten Form des Nullmaximums ein Elektronenanteil überlagert, der kleine Verluste erlitten hat. Die Kurven zeigen, daß der Einfluß dieser Verlustelektronen schon

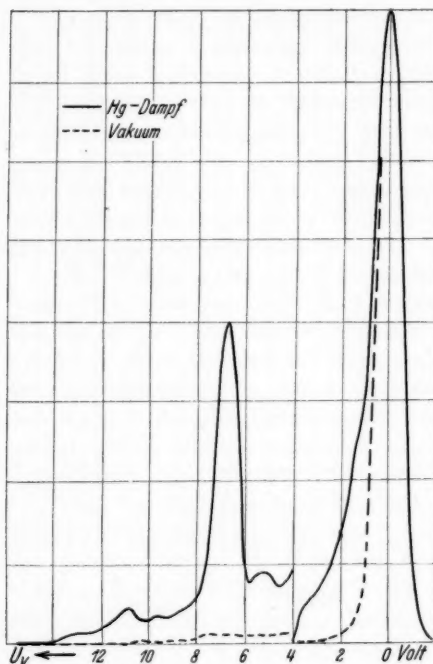


Abb. 11

wesentlich vor der Mitte des Nullmaximums verschwindet. Deshalb läßt sich die Verteilung der Anfangsgeschwindigkeiten dadurch gewinnen, daß man den Abfall des Nullmaximums nach größerem  $V$  an der Abszisse des Höchstwertes spiegelt. Diese Geschwindigkeitsverteilung zeigt eine Halbwertsbreite von 0,8 Volt, dieselbe Halbwertsbreite hat auch das Maximum 6,7 Volt, das einzige, das nicht durch benachbarte Maxima gestört wird. Die Übereinstimmung der Halbwertsbreiten darf als Beweis für die Richtigkeit dieser Zerlegungsmethode angesehen werden. Abb. 12 zeigt eine in dieser Weise zerlegte Kurve.

Ist  $Q_i$  der Wirkungsquerschnitt für die Anregung des Terms, der zum  $i$ -ten Verlustmaximum gehört, so ist

$$Q_i = \frac{1}{l \cdot p} \cdot \frac{\int_0^{v_i} N_i(V) dV}{\int_0^{v_i} N(V) dV}$$

Dabei ist  $l$  die Länge des Stoßraumes und  $p$  der Druck des Hg-Dampfes in mm Hg. Das Integral im Zähler ist, wie der Index  $i$  andeutet, nur über das  $i$ -te Verlustmaximum zu er-

strecken, das Integral im Nenner aber über die ganze Verteilungsfunktion  $N(V)^1$ .

Da  $N(V)$  nur bis 14 Volt gemessen wurde, ist das Integral

$\int_0^{V_0} N(V) dV$  nicht ohne weiteres den gemessenen Kurven zu entnehmen.

Orientierende Messungen zeigten aber, daß der Bereich zwischen 14 Volt und  $V_0$  in jedem Fall nur wenig zum Gesamtintegral beiträgt. Zudem läßt sich dieser kleine Beitrag, den der nicht gemessene Teil von  $N(V)$  zum Integral

$\int_0^{V_0} N(V) dV$  liefert, aus den

Wirkungsquerschnitten  $Q_j$  für Ionisation berechnen, die den jeweiligen Stoßspannungen  $V_0$  zugeordnet sind, und deren Größe für Hg mehrfach bestimmt wurde und deshalb gut bekannt ist. Wir setzen

$$\int_0^{V_0} N(V) dV = \int_0^{V_j} N(V) dV + \int_{V_j}^{V_0} N(V) dV,$$

wo  $V_j$  die Ionisierungsspannung ist. Es ist dann

$$\frac{\int_{V_j}^{V_0} N(V) dV}{\int_0^{V_j} N(V) dV} = \frac{Q_j \cdot l \cdot p}{1 - Q_j \cdot l \cdot p}.$$

1) Bei dieser Rechnung ist nur das lineare Glied der  $e$ -Funktion berücksichtigt. Hinzunahme des quadratischen Gliedes ändert das Resultat unter den gegebenen Bedingungen nur um 1%, liegt also innerhalb der Fehlergrenzen.

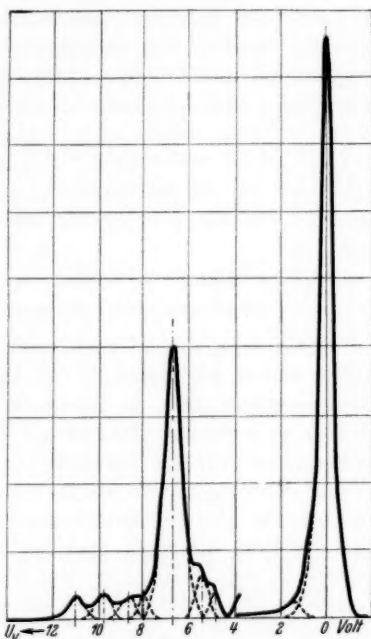


Abb. 12. Beispiel für die Zerlegung der Kurven

Daraus folgt

$$Q = \frac{1}{l \cdot p} \cdot \frac{\int_0^{v_0} N_i(V) dV}{\int_0^{v_0} N(V) dV} = \frac{1}{l \cdot p} \cdot \frac{\int_0^{v_j} N_i(V) dV}{\int_0^{v_j} N(V) dV} (1 - Q_j l p).$$

$Q_j$  wurde den Messungen von Smith<sup>1)</sup> entnommen.

Wie bereits oben gesagt, ist die Höhe der einzelnen Maxima proportional dem Flächeninhalt unter dem betreffenden Maximum, wir können also schreiben

$$Q_i = \frac{1}{l \cdot p} \cdot \frac{h_i}{\sum h_i},$$

worin

$h_i$  = Höhe des Verlustmaximums  $i$

und

$\sum h_i$  = Summe der Höhen aller Maxima unter Einschluß des Nullmaximums bedeutet.

Elektronen, die im Stoßraum mit einem Hg-Atom zusammenstoßen, ändern ihre Richtung. Überschreitet diese Richtungsänderung einen bestimmten, durch Apparaturabmessung und Stoßort gegebenen Winkel, so trifft das Elektron auf die Wandung des Stoßraums und gelangt nicht auf den Auffänger. Durch diese Streuverluste können Fehler entstehen. Denn bei Berechnung der unelastischen Wirkungsquerschnitte wird implizite vorausgesetzt, daß alle Elektronen, die in den Stoßraum eintreten, auch wirklich nach Durchlaufen des Stoßraums von der Messung im Gegenfeld erfaßt werden. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so wird der unelastische Wirkungsquerschnitt zu klein oder groß gefunden, je nachdem die Ausfälle bei den Elektronen, die Verluste erlitten haben, oder bei den Elektronen, die den Stoßraum ohne Energieverlust passiert haben, anteilmäßig größer sind. Die Fehler, die durch diese Streuverluste entstehen können, werden zwar bei Anregung eines bestimmten Terms um so kleiner, je größer die Geschwindigkeit der stoßenden Elektronen wird, weil sich ganz allgemein die Richtungsverteilung nach elastischen und unelastischen Stößen mit wachsender Geschwindigkeit immer enger um die Stoßrichtung herumlegt. Für kleine Geschwindigkeiten sind diese Richtungsänderungen aber im Mittel so groß, daß die Meßresultate durch die Streuverluste weitgehend entstellt werden; ordnet man also, wie das hier geschehen ist, Stoßraum und Auffänger axial hintereinander an, so hat man sich bei der Ausbeutemessung

1) P. T. Smith, Phys. Rev. **37**. S. 808. 1931.

auf Geschwindigkeiten zu beschränken, bei denen sich die durch Streuverluste entstehenden Fehler abschätzen lassen und zum Meßwert selbst in einem vernünftigen Verhältnis stehen. Das sind aber Geschwindigkeiten, bei denen die kinetische Energie der anregenden Elektronen die Anregungsenergie um ein Mehrfaches übersteigt<sup>1)</sup>. Die vorliegende Untersuchung beschränkt sich auf Stöße, bei denen die Energieverluste höchstens 14 Volt betragen, und bei denen die Geschwindigkeit der stoßenden Elektronen zwischen 100 und 300 Volt liegt. In diesem Geschwindigkeitsbereich ist die Richtungsverteilung nach elastischen und unelastischen Stößen an Hg von Tate und Palmer<sup>2)</sup> und van Voorhis<sup>3)</sup> gemessen. Beide Autoren fassen allerdings bei der Untersuchung der unelastischen Stöße die Verluste bis zu 10,2 Volt zusammen. Infolgedessen ist die Richtungsverteilung der unelastischen Stöße, wie sie sich aus den zitierten Messungen ergibt, nur eine Mittelbildung über alle Richtungsverteilungen, die den in der vorliegenden Arbeit untersuchten Anregungen zugeordnet sind. Die Korrektur, die aus dieser Mittelbildung errechnet wird, hängt deshalb auch nur noch von der Geschwindigkeit des stoßenden Elektrons ab und ist an alle, einer Kurve entnommenen Ausbeuten in gleicher Weise anzubringen. Die Korrekturen, die nach dieser Rechnung an den gemessenen Werten anzubringen sind, sind unter gleichzeitiger Berücksichtigung der durch die Ionisierung bedingten Korrektur in Abb. 13 zusammengestellt<sup>4)</sup>.

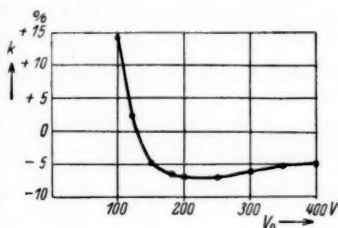


Abb. 13

1) Es sei ausdrücklich betont, daß diese Beschränkung in keiner Weise bedingt ist durch den Gedanken, der hier zur Verschärfung der Ausbeutemessung benutzt wurde. Sie ist vielmehr ausschließlich bedingt durch die davon ganz unabhängige Anordnung von Stoßraum und Auffänger, die zunächst gewählt wurde, um die Verschärfung der Ausbeutemessung an einem möglichst einfachen System zu erproben. Die Beschränkung auf hohe Geschwindigkeiten läßt sich durch andere Anordnung von Stoßraum und Auffänger grundsätzlich beseitigen.

2) Tate u. Palmer, Phys. Rev. 40. S. 731. 1932.

3) van Voorhis, Phys. Rev. 46. S. 480. 1934.

4) Der Wechsel des Vorzeichens ist darauf zurückzuführen, daß die Streuverluste bei elastischen und unelastischen Stößen mit verschiedenen Vorzeichen eingehen, und bei kleinen Geschwindigkeiten die Wirkung der unelastischen Streuung, bei großen Geschwindigkeiten die Wirkung der elastischen Streuung überwiegt.

Die mittlere Richtungsverteilung, die der Berechnung der Korrektur zugrunde liegt, muß sehr nahe übereinstimmen mit der Richtungsverteilung bei Anregung von  $2^1P$ , weil Anregung dieses Terms bei weitem überwiegt. Dagegen ist die Benutzung dieser Richtungsverteilung zur Korrektur der schwachen Ausbeuten mit einer Unsicherheit behaftet. Man darf jedoch auf Grund der in vielen Einzelheiten geprüften Theorie der Stoßprozesse annehmen, daß die Richtungsverteilung bei Anregung der anderen Terme zwar ungünstiger, aber nicht so ungünstig wird, wie die Verteilung bei elastischer Streuung, d. h. aber, die kleinen Ausbeuten sind höchstens um 20% zu niedrig. Eine größere Sicherheit können aber die kleinen Ausbeuten einstweilen sowieso nicht für sich in Anspruch nehmen, weil sich bei ihrer Messung schon infolge von Störeffekten erhebliche Schwankungen bemerkbar machten.

Systematische Fehler können ferner dadurch entstehen, daß das Spannungsintervall  $\Delta V$  notwendigerweise endlich bleiben muß. Zur Abschätzung dieser Fehler genügt es, die Kurve  $I = I(V)$  im Intervall  $\Delta V$  durch eine Gerade zu ersetzen. Diese Fehler sind rechnerisch leicht zu ermitteln. Anwendung der Taylorsche Entwicklung bis auf Glieder von mindestens 4. Ordnung in  $\Delta V$  ergibt:

$$\frac{\Delta I}{\Delta V} - \frac{dI}{dV} = \frac{1}{24} \left( \frac{d^3 I}{dV^3} \right)_{V_0} \Delta V^2.$$

Unter Benutzung von

$$N(V) = - \frac{dI}{dV}$$

ergibt sich für die Korrektur  $\Delta N(V)$ , die dem gemessenen Werte von  $N(V)$  zuzufügen ist, um den richtigen Wert zu erhalten

$$\Delta N(V) = - \frac{1}{24} \left( \frac{d^3 N}{dV^3} \right)_{V_0} \Delta V^2.$$

Wir betrachten zunächst diejenigen Maxima der Geschwindigkeitsverteilungskurve, bei denen eine wesentliche Verzerrung durch Überlagerung nicht stattfindet, in unserem Fall also das Maximum der Null-Elektronen und das Maximum, das der Anregung von  $2^1P$  zugeordnet ist. Da die Form dieser Maxima in gleicher Weise durch die Anfangsgeschwindigkeitsverteilung der Elektronen bestimmt ist, ist auch der prozentuale Fehler an entsprechenden Stellen überall derselbe. Das gilt insbesondere auch für die Höhe  $h$ , die allein in die Berechnung des Wirkungsquerschnitts eingeht. Ersetzt man zur Abschätzung des Fehlers für  $h$  den zweiten Differentialquotienten



$\left(\frac{d^2N}{dV^2}\right)_V$ , der wahren Geschwindigkeitsverteilung durch den entsprechenden Differentialquotienten, der der gemessenen Kurve entnommen ist, so ergibt sich, daß der Fehler für die Höhe 4% sicher nicht übersteigt<sup>1)</sup>. Die Höhen werden also höchstens 4% zu klein gemessen. Da aber nur die Verhältnisse der Höhen in das Resultat eingehen, fällt dieser Fehler völlig heraus, wenn es sich um Maxima handelt, die durch Überlagerung nicht gestört werden. Werden dagegen die Ausbeutemaxima durch Überlagerung gestört, so wird  $\frac{d^2N}{dV^2}$  an der Stelle der Höhe algebraisch größer, es wird also auch  $h$  im Verhältnis zur Höhe des Nullmaximums zu groß gemessen. Der Fehler kann jedoch, wie aus dem oben gesagten und dem Kurvenbild ohne weiteres ersichtlich ist, wenige Prozent nicht überschreiten. Er ist also wesentlich kleiner als die Unsicherheit, die den kleinen Ausbeuten schon wegen des Streufehlers anhaftet und liegt zudem noch überall in entgegengesetzter Richtung.

Zusammengefaßt läßt sich über die systematischen Fehler folgendes sagen:

Für die Anregung von  $2^1P$  sind systematische Fehler höchstens im Betrage von 2–3% zu erwarten, die kleinen Ausbeuten sind wahrscheinlich zu klein ausgefallen, der Fehler kann jedoch auch hier 20% nicht übersteigen.

Der Einfluß, den zufällige Fehler auf das Resultat haben können, läßt sich abschätzen, wenn man die Streuung der einzelnen Meßpunkte um die Kurven betrachtet, die den Gang der Ausbeutequerschnitte mit der Voltgeschwindigkeit der anregenden Elektronen darstellen. (Abb. 14 im nächsten §.) Für die Anregung von  $2^1P$  sind diese Fehler sicher nicht größer als  $\pm 4\%$ , für die kleineren Ausbeuten können sie auf  $\pm 10\%$  steigen.

Da sich die Anregungsfunktionen der höheren Terme bisher nicht einmal größenordnungsmäßig festlegen ließen, darf die Unsicherheit der kleinen Ausbeuten in Kauf genommen werden, zumal die Fehlerabschätzung in allen Fällen äußerste Grenzen gibt und der Gesamtfehler wahrscheinlich wesentlich kleiner sein wird.

Es wurden auch eine Reihe von Punkten in dem Bereich zwischen 40 und 100 Volt gemessen. Da jedoch die Korrekturen für diese Werte durch Extrapolation ermittelt werden mußten, und die Streuung der Meßwerte infolge der geringen Stromwerte erheblich wurde, kann diesen Messungen kein wesentliches Gewicht gegeben werden.

1) Bei den Messungen war  $\Delta V$  etwa = 0,2 Volt.

## § 5. Meßergebnisse

Zunächst seien die in allen Kurven festgestellten Maxima den Termen zugeordnet, deren Ausbeute sie messen.

Die beiden Maxima bei 5,4 und 4,9 Volt sind der Anregung der  $2^3P$ -Terme zuzuordnen. Anregung von  $2^3P_0$  und  $2^3P_1$  (4,66 und 4,86 Volt) wird nicht getrennt.

Das Maximum bei 6,7 Volt entspricht eindeutig der Anregung von  $2^1P$ .

Es folgt ein sehr kleines und stark gestörtes Maximum bei 7,9 Volt. Die Lage entspricht sehr gut dem  $2^1S$ -Term. (Anregungsspannung 7,89 Volt.) Wäre Anregung von  $2^3S$  (Anregungsspannung 7,69 Volt) wesentlich beteiligt, müßte die Verschiebung — besonders bei kleineren Geschwindigkeiten, wo die Ausbeute größer ist — merklich geworden sein.

Die Einordnung der beiden nächsten Maxima würde bei der dichten Lage der Terme Schwierigkeiten machen, wenn nicht eine Anomalie der  $^1P$ -Terme die Zuordnung eindeutig vorschreiben würde. Bei dem Verlust von 8,8 Volt ist außer der Anregung von  $3^1P$ ,  $3^3D$  nicht auszuschließen, wenn man bei der Deutung lediglich von der Größe des Energieverlustes ausgeht. Das nächste Maximum liegt aber *nicht* bei 9,5 Volt, wo sich auf ganz engem Bereich  $4^1D$ ,  $4^3P$ ,  $4^3D$  und  $4^3F$  zusammendrängen, sondern liegt bei 9,8 Volt, wo sich infolge der Anomalie der  $^1P$ -Terme  $4^1P$  und  $5^1P$  dicht aneinanderlagern. (Anregungsspannung bei 9,71 und 9,86 Volt.) Es muß sich also auch bei dem Maximum, das bei 8,8 Volt erscheint, um die Anregung von  $3^1P$  handeln.

Es wird also, wie das auch theoretisch zu erwarten ist, vorzugsweise die Termreihe angeregt, die bei gleicher Multiplizität unmittelbar mit dem Grundterm kombiniert. Bei Anregung der Interkombinationslinie  $1^1S - 2^3P$  orientiert sich die Anregung offenbar nicht nach den Auswahlregeln für die inneren Quantenzahlen, sondern nach dem Gewicht der einzelnen Tripletterme.

Das Maximum bei 11,0 Volt entspricht Ionisierungsverlusten. Bei den ionisierenden Stößen liegen die Verhältnisse insofern anders als bei der Anregung scharf definierter Terme, als hier die Ausbeute kontinuierlich über die Voltscala verteilt ist. Das Verhalten der auf die Skaleneinheit bezogenen Ausbeute beim Übergang über die Ionisierungsspannung ist in quantitativ auswertbarer Form bisher nicht gemessen. Das scharfe Heraustreten des Ionisierungsmaximums zeigt jedenfalls, daß die auf die Einheit der Voltscala bezogene mittlere Ausbeute an anregenden Stößen sich an der Ionisierungsgrenze nicht monoton fallend in der ebenfalls auf die Skaleneinheit

bezogenen Ionisierungsausbeute fortsetzt. Die Verschiebung des Maximums zeigt vielmehr, daß diese auf die Skaleneinheit bezogene Ausbeute unmittelbar hinter der Ionisierungsgrenze ansteigt, um dann allerdings schon bei etwa 11,5 Volt zu unmerklichen Werten abzusinken. Es scheinen hier also ähnliche Verhältnisse vorzuliegen, wie sie Ditchburn<sup>1)</sup> beim Übergang von Absorptionsserien ins Serienkontinuum beobachtete. Ditchburn fand, daß die Absorption an der Seriengrenze beim Übergang in das Endkontinuum zunächst nahezu unstetig zunahm, um erst dann wieder monoton mit wachsender Frequenz abzunehmen. Ob allerdings in dem vorliegenden Fall die

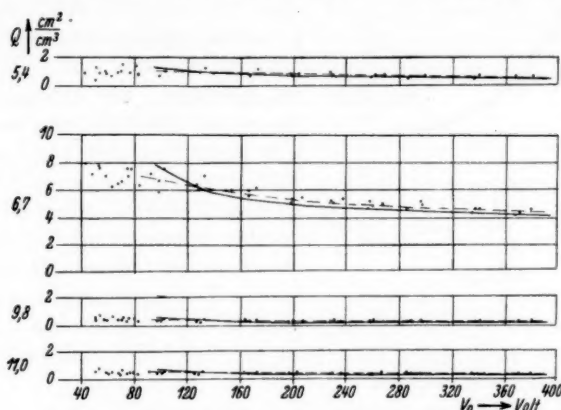


Abb. 14. Elektrische Anregungsfunktion Hg für die Verluste 5,4, 6,7, 9,8, 11,0 Volt.

--- Kurven ohne Korrektur

— Kurven nach den in § 4 besprochenen Korrekturen

auf die Skaleneinheit bezogene Ausbeute an der Ionisierungsgrenze tatsächlich eine Unstetigkeit hat, läßt sich bei der geringen Auflösung noch nicht feststellen, ist aber nicht ausgeschlossen.

Da Messungen mit einer wesentlich verbesserten Apparatur in Aussicht genommen sind, wird zunächst auf die Auswertung der Maxima bei 4,9 sowie bei 7,9 und 8,8 Volt verzichtet, weil die Zerlegung der  $N(V)$ -Kurve am Ort dieser Maxima infolge der einstweilen noch geringen Auflösung so unsicher war, daß die Mitteilung quantitativer Ergebnisse nicht gerechtfertigt erscheint. Für die übrigen Terme, für die die Fehlerdiskussion schon oben gegeben

1) R. W. Ditchburn, Ztschr. f. Phys. **107**. S. 719. 1934.

wurde, wird der Anregungsquerschnitt und seine Abhängigkeit von der Elektronengeschwindigkeit in Abb. 14 dargestellt.

Ein quantitativer Vergleich ist nur bei den Messungen von Tate und Palmer (a. a. O.) möglich, die durch Integration über die von ihnen gemessene Richtungsverteilung den Wirkungsquerschnitt für die Gesamtheit der anregenden Stöße bestimmen<sup>1)</sup>. Den von Tate und Palmer gemessenen Wirkungsquerschnitt erhalten wir

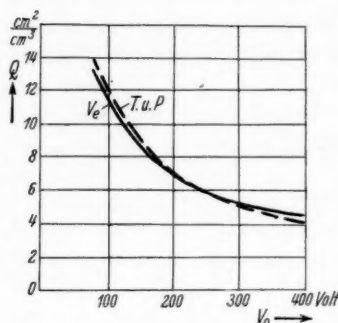


Abb. 15

durch Addition der hier gemessenen Einzelquerschnitte. Dabei wurden die Wirkungsquerschnitte für 4,9 bzw. 7,9 und 8,8 Volt, die im ganzen nur eine kleine Korrektur ausmachen, nach den  $N(V)$ -Kurven geschätzt. Die Abweichungen liegen bis 300 Volt ganz wesentlich unter den oben zugelassenen Fehlergrenzen, nur für die größten Geschwindigkeiten gehen sie etwas darüber hinaus. Da bei Tate und Palmer für deren Messungen keine Fehlergrenzen angegeben sind, läßt sich nicht ohne weiteres

entscheiden, worin diese Diskrepanz mit den beiderseitigen Fehlergrenzen noch vereinbar ist.

Zu dem Maximum mit einer Verlustspannung von etwa 1,5 Volt ist zu sagen, daß bisher eine physikalische Deutung noch nicht gelungen ist. Da das Maximum, wie bereits erwähnt, bei Ausfrieren des Hg-Dampfes verschwindet, ist jedoch anzunehmen, daß es sich nicht um Störeffekte handelt, die durch die Apparatur bedingt sind.

#### Zusammenfassung

Die Empfindlichkeit bei der Bestimmung der Ausbeute unelastischer Stöße wird dadurch sehr gesteigert, daß die Gegenspannungscharakteristik durch Überlagerung einer kleinen Wechsel-

1) Da die Messungen von Tate und Palmer auch zur Berechnung der Korrektur herangezogen wurden, sei ausdrücklich vermerkt: Der Vergleich gibt insofern eine völlig unabhängige Prüfung des Resultates, als er zeigt, daß die Ausbeute, die in den bei der vorliegenden Messung unmittelbar erfaßten Raumkegel hineinfällt, mit dem entsprechenden Ausbeuteanteil, wie er sich aus den Messungen von Tate und Palmer berechnet, gut übereinstimmt. Zudem sind oberhalb von 200 Volt die Korrekturen so klein, daß von einer Abhängigkeit schon deshalb nicht die Rede sein kann.

spannung elektrisch differenziert wird, und damit die Geschwindigkeitsverteilung des austretenden Elektronenstrahls unmittelbar gemessen wird. Es werden elektrische Anregungsfunktionen einzelner Quecksilberterme zwischen 100 und 380 Volt aufgenommen und die Fehlerquellen der Methode diskutiert.

Diese Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule Hannover ausgeführt. Herrn Prof. Dr. H. Bartels spreche ich für die Anregung zur vorliegenden Untersuchung und deren dauernde Unterstützung meinen herzlichen Dank aus. Der Helmholtz-Gesellschaft habe ich für weitgehende Unterstützung zu danken.

Hannover, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen 15. März 1939)

## Quantenmechanische Theorie der Röntgenstrahlinterferenzen in Kristallen

### I. Ableitung und allgemeine Diskussion der dynamischen Grundgleichungen

Von G. Mollère

(Mit 2 Abbildungen)

In den ursprünglich von P. P. Ewald und C. G. Darwin<sup>1)</sup> entwickelten Formen der dynamischen Theorie der Kristallröntgeninterferenzen wurden die einen Kristall aufbauenden Atome oder Ionen als punktförmige Streuzentren betrachtet. Demgegenüber beruht die später von M. v. Laue<sup>2)</sup> entwickelte Form der Theorie auf der Annahme eines kontinuierlich im Kristall verteilten Streuvermögens entsprechend der kontinuierlichen Ladungsverteilung der Elektronen nach der Wellenmechanik. Die kontinuierliche Verteilung des Streuvermögens wird dabei in der Weise berücksichtigt, daß der Kristall als Dielektrikum mit dreifachperiodischer Dielektrizitätskonstante betrachtet wird, in dem sich die Röntgenwellenfelder nach den Maxwell'schen Gleichungen des Dielektrikums ausbreiten. M. Kohler<sup>3)</sup> hat eine quantenmechanische Begründung des v. Laueschen Ansatzes gegeben. Er berechnete die Stromdichte  $\mathfrak{J}$ , die in einem Kristall durch ein elektromagnetisches Wechselfeld induziert wird, indem er letzteres als Störungsglied in die Schrödingergleichung der Kristallelektronen einsetzte. Er fand dabei einen Ausdruck für die Stromdichte, welcher in zwei Anteile  $\mathfrak{J}^{(1)}$  und  $\mathfrak{J}^{(2)}$  zerfällt, deren erster für die Streuung von Röntgenstrahlen genügend hoher Frequenz, denen gegenüber die Elektronen praktisch als frei betrachtet werden können, allein maßgeblich ist, während der zweite „Resonanz“-Anteil im Bereich der anomalen Dispersion wesentlich ist. Bei Berücksichtigung

1) C. G. Darwin, Phil. Mag. 27. S. 675. 1914; P. P. Ewald, Ann. d. Phys. 54. S. 519 u. 557. 1917; P. P. Ewald, Ztschr. f. Kristallogr. 97. S. 1. 1937.

2) M. v. Laue, Erg. d. exakt. Naturw. Bd. X. S. 133. 1931. Vgl. auch E. Lohr, Wiener Ber. 133. S. 157. 1924.

3) M. Kohler, Berliner Ber. phys.-math. Kl. XIX. S. 1. 1935. Vgl. auch F. Galperin, Phys. Ztschr. d. Sowjetunion 11. S. 182. 1937. Galperin führt im wesentlichen die gleiche quantenmechanische Rechnung wie M. Kohler durch. Seine Schlußfolgerung, man müsse in der v. Laueschen Theorie eine dreifachperiodische Dielektrizitätskonstante in Form eines nichthermiteschen Tensors ansetzen, ist jedoch unrichtig.

allein des Anteils  $\mathfrak{J}^{(1)}$  konnte Kohler den v. Laueschen Ansatz einer dreifachperiodischen Dielektrizitätskonstante und damit die v. Lauesche Form der dynamischen Grundgleichungen bestätigen.

In der vorliegenden Arbeit, die an M. Kohlers Arbeit anknüpft, wird gezeigt, daß auch der Resonanzanteil  $\mathfrak{J}^{(2)}$  der induzierten Stromdichte vollständig und in geschlossener Form in die dynamische Theorie der Kristallröntgeninterferenzen eingebaut werden kann. Dabei ergeben sich die v. Laueschen dynamischen Grundgleichungen in einer verallgemeinerten Form [vgl. Gl. (2,13)], in der sie auch für den Bereich der anomalen Dispersion gültig sind und dort die Ausbreitung — d. h. Brechung, Reflexion usw. und zugleich auch die Absorption — der Röntgenstrahlen im Kristall beschreiben. Die in den Grundgleichungen auftretenden Koeffizienten können im Bereich der anomalen Dispersion nicht mehr als Fourierkoeffizienten eines gewöhnlichen Streuvermögens in Form einer einfachen Ortsfunktion aufgefaßt werden, vielmehr tritt an die Stelle dieses Streuvermögens ein tensorieller Integralkern [vgl. Gl. (1,33)], welcher die an einer Stelle  $\mathbf{r}$  induzierte Polarisation  $\mathfrak{P}(\mathbf{r})$  mit der Feldstärke  $\mathfrak{E}(\mathbf{r})$  an verschiedenen Stellen  $\mathbf{r}'$ , über die integriert wird, verknüpft.

Der Einfluß der Resonanzstreuung bei den Röntgenstrahlinterferenzen wurde bereits von H. Hönl<sup>1)</sup> berücksichtigt, jedoch nicht im Rahmen einer in sich geschlossenen dynamischen Theorie, sondern durch Berechnung eines verallgemeinerten Atomfaktors auf Grund der Wallerschen Dispersionsformel für das freie Atom<sup>2)</sup>. Der Begriff des Atomfaktors stammt ja aus der elementaren Theorie der Röntgenstrahlinterferenzen und ist der dynamischen Theorie P. P. Ewalds nur künstlich aufgepfropft. Praktisch vernachlässigt Hönl's Theorie den Einfluß der Gitterstruktur, der gerade bei der Resonanzstreuung merkbar wird und zu den bekannten von R. de L. Kronig<sup>3)</sup> gedeuteten Anomalien des Absorptionskoeffizienten sowie zu röntgenoptischer Anisotropie führt, wie im anschließenden Teil II dieser Arbeit gezeigt wird. — An die Stelle des Atomfaktors treten in v. Laues bzw. unserer Theorie die in den Grundgleichungen auftretenden Koeffizienten; für die letzteren erhalten wir Formeln, die denen von H. Hönl bzw. I. Waller sehr ähnlich sind. [Vgl. z. B. die Gl. (4,12) und (4,13) dieser Arbeit.] Der unserer (sowie bereits M. Kohlers) Theorie zugrunde liegende Ansatz kann als Übertragung des kohärenten Streuanteils der Wallerschen Dispersionsformel vom einzelnen Atom auf das Elektronensystem des gesamten

1) H. Hönl, Ann. d. Phys. 18. S. 625. 1933.

2) I. Waller, Ztschr. f. Phys. 51. S. 213. 1928.

3) R. de L. Kronig, Ztschr. f. Phys. 70. S. 317. 1931; 75. S. 191 u. 468. 1932.



Kristalls aufgefaßt werden. Ein wesentlicher Unterschied besteht jedoch darin, daß in unserer Theorie nicht zwischen einfallender und gestreuter Welle unterschieden wird; vielmehr wird das gesamte elektromagnetische Wechselfeld so bestimmt, daß es zusammen mit der von ihm induzierten Polarisierung den Maxwell'schen Gleichungen genügt. Dieses Verfahren ist charakteristisch für v. Laues dynamische Theorie.

Der vorliegende Teil I dieser Arbeit enthält die Aufstellung der Grundgleichungen sowie eine eingehende Diskussion der darin auftretenden Koeffizienten. Der Inhalt der einzelnen Paragraphen ist folgender: § 1 enthält die zugrundeliegende quantenmechanische Störungsrechnung; im § 2 werden die verallgemeinerten Grundgleichungen aufgestellt. Nach allgemeinen Betrachtungen über inkohärente Streuung und Absorption im § 3 dienen die folgenden Paragraphen der eingehenden Diskussion der in den Grundgleichungen auftretenden Koeffizienten, und zwar werden im § 4 bestimmte Ausdrücke für dieselben durch Einführung Hartreescher Näherung (d. h. Reduktion auf das Einelektronenproblem) hergeleitet, die im § 5 in Streu- und Absorptionsanteil unterteilt werden. Im § 6 wird der Tensorcharakter und im letzten § 7 die Frequenzabhängigkeit der Koeffizienten diskutiert. — Im Teil II dieser Arbeit<sup>1)</sup> werden die Folgerungen für die eigentliche dynamische Theorie der Brechung, Reflexion und Absorption von Röntgenstrahlen in Kristallen behandelt.

#### § 1. Quantenmechanische Berechnung der durch ein elektromagnetisches Wechselfeld im Kristall induzierten Polarisierung

Die ungestörte Schrödingergleichung der Kristallelektronen habe die Form

$$(1,1) \quad \left( H_0 - \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi = 0$$

und ihre stationären Lösungen seien

$$(1,2) \quad \Psi_m = u_m e^{2\pi i \nu_m t},$$

wobei  $\nu_m = \frac{W_m}{h}$  und  $W_m$  die Energie des  $m$ -ten stationären Zustandes ist. Durch ein elektromagnetisches Wechselfeld tritt ein kleines Zusatzglied  $H_1(t)$  zur Hamiltonfunktion  $H_0$  hinzu, so daß die gestörte Hamiltonfunktion lautet

$$(1,3) \quad \left( H_0 - \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi = - H_1 \Psi.$$

$H_1(t)$  sei mit der Frequenz  $\nu$  zeitlich veränderlich, also von der Form

$$(1,4) \quad H_1 = H^+ e^{2\pi i \nu t} + H^- e^{-2\pi i \nu t}.$$

1) Vgl. nächstes Heft.

Die stationären Lösungen des gestörten Problems ergeben sich dann in bekannter Weise durch den Ansatz

$$(1,5) \quad \Psi = u_m e^{2\pi i \nu_m t} + u^+ e^{2\pi i (\nu_m + \nu) t} + u^- e^{2\pi i (\nu_m - \nu) t}.$$

Entwickelt man gemäß

$$(1,6) \quad u^\pm = \sum_n b_n^\pm u_n,$$

so ergibt Gl. (1,3) für die Koeffizienten  $b^+$  und  $b^-$ :

$$(1,7) \quad b^\pm = - \frac{H_{nm}^\pm}{h(\nu_{nm} \mp \nu)},$$

wobei

$$(1,8) \quad H_{nm}^\pm = \int u_n^* H^\pm u_m d\tau$$

und

$$(1,9) \quad \nu_{nm} = \nu_n - \nu_m = \frac{(W_n - W_m)}{h}$$

ist. Speziell für diejenige Lösung  $\Psi$  von (1,3), die im Grenzfall verschwindender Störung in den Grundzustand  $\Psi_0$  des ungestörten Problems übergeht, erhält man nach (1,5), (1,6) und (1,7) mit  $m = 0$  einen Ausdruck der Form

$$(1,10) \quad \Psi = \left( u_0 + \sum_n F_n(t) u_n \right) e^{2\pi i \nu_0 t}$$

mit

$$(1,11) \quad F_n(t) = - \left[ \frac{H_{n0}^+ e^{2\pi i \nu t}}{h(\nu_{n0} - \nu)} + \frac{H_{n0}^- e^{-2\pi i \nu t}}{h(\nu_{n0} + \nu)} \right].$$

Das elektromagnetische Wechselfeld sei durch sein Vektorpotential  $\mathfrak{A}$  beschrieben, das so normiert sei, daß das zugehörige skalare Potential verschwindet. Das Störungsglied  $H_1 \Psi$  in Gl. (1,3) hat dann nach M. Kohler<sup>1)</sup> die Form

$$(1,12) \quad H_1 \Psi = \frac{e\hbar}{4\pi i m c} \sum_s [\text{div}_s (\mathfrak{A}_s \Psi) + (\mathfrak{A}_s, \text{grad}_s \Psi)].$$

Dabei charakterisiert der Index  $s$  die Koordinaten des  $s$ -ten Elektrons und  $\mathfrak{A}_s$  bedeutet den Wert des Vektorpotentials  $\mathfrak{A}$  am Ort des  $s$ -ten Elektrons. Man beachte, daß das Vektorpotential in unserem Fall nicht divergenzfrei ist. Mit  $\text{div } \mathfrak{A} = 0$  würde Gl. (1,12) die von andern Dispersionsproblemen her bekannte Gestalt annehmen. — Das weitere Programm besteht darin, die Strom- und Ladungsdichte

$$(1,13,1) \quad \mathfrak{J}(\mathbf{r}) = \sum_k \left[ \int \left\{ - \frac{e^2}{mc} \mathfrak{A}_k \Psi^* \Psi + \frac{e\hbar}{4\pi i m} (\Psi \text{grad}_k \Psi^* - \Psi^* \text{grad}_k \Psi) \right\} d\tau_k \right]_{\mathbf{r}_k = \mathbf{r}}$$

1) Vgl. M. Kohler, a. a. O.

und

$$(1,13,2) \quad \varrho(\mathbf{r}) = e \sum_k \left[ \int_{\mathbf{r}_k = \mathbf{r}} \Psi^* \Psi d\mathbf{r}'_k \right]$$

zu berechnen<sup>1)</sup>. Hierbei bedeutet  $e$  die Ladung und  $m$  die Masse des Elektrons,  $\text{grad}_k$  den Gradientenoperator bezüglich der Koordinaten des  $k$ -ten Elektrons und  $d\mathbf{r}'_k$  das Produkt der Volumenelemente in sämtlichen Elektronenkoordinaten außer dem  $k$ -ten. Das Vektorpotential  $\mathfrak{A}$  soll dann nachträglich so bestimmt werden, daß es zusammen mit der Stromdichte  $\mathfrak{J}$  die Maxwell'schen Gleichungen erfüllt. Das beschriebene Verfahren ist insofern nicht ganz streng, als die Größe  $\mathfrak{A}_s$  in (1,12) und (1,13,1) eigentlich den Wert des Vektorpotentials am Orte des  $s$ -ten Elektrons *abzüglich* des vom  $s$ -ten Elektron selbst erzeugten Anteils von  $\mathfrak{A}$  bedeuten sollte.  $\mathfrak{A}_s$  sollte also in der Ausdrucksweise P. P. Ewalds das „erregende Feld“ für das  $s$ -te Elektron sein. Der Unterschied zwischen dem erregenden Feld und dem Gesamtfeld ist jedoch im Falle von Röntgenstrahlen zu vernachlässigen.

Wir wollen nun die Stromdichte  $\mathfrak{J}$  berechnen, indem wir Gl. (1,10) in (1,13,1) einsetzen. Wir zerlegen dazu  $\mathfrak{J}$  in zwei Anteile,

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}^{(1)} + \mathfrak{J}^{(2)}$$

indem wir zunächst den  $\mathfrak{A}$  enthaltenden Anteil in (1,13,1) vorwegnehmen:

$$(1,14) \quad \mathfrak{J}^{(1)}(\mathbf{r}) = - \frac{e^2}{mc} \sum_k \left[ \int_{\mathbf{r}_k = \mathbf{r}} \mathfrak{A}_k \Psi^* \Psi d\mathbf{r}'_k \right].$$

Da  $\mathfrak{A}_k$  von den Koordinaten des  $k$ -ten Elektrons abhängt, über die in (1,14) nicht integriert wird, kann es vor das Integralzeichen und sodann wegen  $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}$  vor das Summenzeichen gezogen werden, so daß sich mit Benutzung von (1,13,2) ergibt:

$$(1,15) \quad \mathfrak{J}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = - \frac{e \varrho(\mathbf{r})}{mc} \mathfrak{A}(\mathbf{r}, t).$$

Da  $\mathfrak{A}$  klein ist, kann in (1,14) in erster Näherung  $\Psi$  durch  $\Psi_0 = u_0 e^{2\pi i \nu_0 t}$  ersetzt werden, so daß also  $\varrho$  in Gl. (1,15) die Ladungsdichte des ungestörten Kristalls darstellt.  $\mathfrak{J}^{(1)}$  nach Gl. (1,15) stellt, wie wir sehen werden, denjenigen Anteil der Stromdichte  $\mathfrak{J}$  dar, der bei genügend hohen Frequenzen allein maßgeblich ist und der, wie bereits M. Kohler gezeigt hat, zum Ansatz einer dreifachperiodischen Dielektrizitätskonstante im Sinne der v. Laueschen Theorie führt. Der zweite Anteil der Stromdichte in (1,13,1) lautet:

$$(1,16) \quad \mathfrak{J}^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{e \hbar}{4\pi i m} \sum_k \left[ \int_{\mathbf{r}_k = \mathbf{r}} \Psi \text{grad}_k \Psi^* - \Psi^* \text{grad}_k \Psi d\mathbf{r}'_k \right].$$

1) Vgl. M. Kohler a. a. O.; die dortige Gleichung für  $\mathfrak{J}$  enthält wesentlich einen Vorzeichenfehler.

Setzt man hier  $\Psi$  nach Gl. (1,10) ein und berücksichtigt dabei nur die von der Störung herrührenden Glieder, und zwar insofern sie klein von erster Ordnung sind, so erhält man unter Benutzung der Strommatrizelemente

$$(1,17) \quad i_{nm} = i_{mn}^* = \frac{e\hbar}{4\pi i m} \sum_k \left[ \int (u_n \text{grad}_k u_m^* - u_m^* \text{grad}_k u_n) d\tau_k \right],$$

$\tau_k = \tau$

für den Anteil  $\mathfrak{J}^{(2)}$  der Stromdichte

$$(1,18) \quad \mathfrak{J}^{(2)}(\tau, t) = \sum_n \left\{ i_{0n}(\tau) F_n^*(t) + i_{0n}^*(\tau) F_n(t) \right\}.$$

Schließlich sind noch die Koeffizienten  $F_n(t)$  nach Gl. (1,11) zu berechnen. Das Vektorpotential  $\mathfrak{A}$  soll mit der Frequenz  $\nu$  zeitlich oszillieren, also von der Form sein

$$(1,19) \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{2} (\mathfrak{A}' e^{2\pi i \nu t} + \mathfrak{A}'^* e^{-2\pi i \nu t}).$$

Setzt man dies in (1,12) ein und vergleicht mit (1,4), so erhält man

$$(1,20,1) \quad H^+ \Psi = \frac{e\hbar}{8\pi i m c} \sum_s \left\{ \text{div}_s (\mathfrak{A}'_s \Psi) + (\mathfrak{A}'_s, \text{grad}_s \Psi) \right\}$$

und

$$(1,20,2) \quad H^- \Psi = \frac{e\hbar}{8\pi i m c} \sum_s \left\{ \text{div}_s (\mathfrak{A}'_s^* \Psi) + (\mathfrak{A}'_s^*, \text{grad}_s \Psi) \right\}.$$

Für die Matrizelemente  $H_{n0}^+$  ergibt sich somit:

$$(1,21) \quad H_{n0}^+ = \frac{e\hbar}{8\pi i m c} \int \sum_s u_n^* \left\{ \text{div}_s (\mathfrak{A}'_s u_0) + (\mathfrak{A}'_s, \text{grad}_s u_0) \right\} d\tau,$$

wobei  $d\tau$  das Produkt der Volumenelemente in sämtlichen Elektronenkoordinaten bedeutet. Das erste Glied des Integranden läßt sich umformen:

$$(1,22) \quad u_n^* \text{div}_s (\mathfrak{A}'_s u_0) = \text{div}_s (u_n^* \mathfrak{A}'_s u_0) - u_0 (\mathfrak{A}'_s, \text{grad}_s u_n^*).$$

Das von der Divergenz herrührende Oberflächenintegral verschwindet bei der Integration über den ganzen Kristall, und wir erhalten mit Benutzung von (1,17):

$$(1,23,1) \quad H_{n0}^+ = -\frac{1}{2c} \int (\mathfrak{A}'(\tau'), i_{0n}^*(\tau')) d\tau'.$$

In entsprechender Weise ergibt sich:

$$(1,23,2) \quad H_{n0}^- = -\frac{1}{2c} \int (\mathfrak{A}'^*(\tau'), i_{0n}^*(\tau')) d\tau'.$$

Dabei bedeutet  $d\tau'$  das Volumenelement im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum. Setzt man  $H_{n0}^+$  und  $H_{n0}^-$  nach (1,23,1) und (1,23,2) in den Ausdruck (1,11) für die Koeffizienten  $F_n(t)$  und diesen sodann in Gl. (1,18) ein, so erhält man für den Anteil  $\mathfrak{J}^{(2)}$  der Stromdichte den Ausdruck

$$(1,24) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{J}^{(2)}(\tau, t) = \frac{1}{2c} \sum_n & \left[ \frac{i_{0n}(\tau) \int (\mathfrak{A}', i_{0n}^*) d\tau'}{h(\nu_{n0} - \nu)} e^{2\pi i \nu t} + \frac{i_{0n}(\tau) \int (\mathfrak{A}'^*, i_{0n}) d\tau'}{h(\nu_{n0} + \nu)} e^{-2\pi i \nu t} \right. \\ & \left. + \frac{i_{0n}^*(\tau) \int (\mathfrak{A}'^*, i_{0n}) d\tau'}{h(\nu_{n0} - \nu)} e^{-2\pi i \nu t} + \frac{i_{0n}^*(\tau) \int (\mathfrak{A}', i_{0n}) d\tau'}{h(\nu_{n0} + \nu)} e^{2\pi i \nu t} \right]. \end{aligned} \right.$$

Gl. (1,24) ist, wie es sein muß reell, da sich, wie man sieht, jeweils konjugiert-komplexe Glieder entsprechen.

Wir gehen nunmehr für alle Feldgrößen zur komplexen Schreibweise über, indem wir an Stelle von (1,19) den komplexen Ansatz machen:

$$(1,25) \quad \mathfrak{A}(\mathbf{r}, t) = \mathfrak{A}'(\mathbf{r}) e^{2\pi i \nu t},$$

sowie entsprechende Ansätze für die Stromdichte  $\mathfrak{J}$ , die elektrische Feldstärke  $\mathfrak{E}$  usw., und setzen fest, daß physikalische Bedeutung jeweils nur dem Realteil der betreffenden Feldgröße zukommen soll. Diese Schreibweise ermöglicht es, Phasenverschiebungen einfach durch komplexe Faktoren zu berücksichtigen, wodurch sich unsere Gleichungen wesentlich vereinfachen werden. Gl. (1,15) bleibt beim Übergang zur komplexen Schreibweise unverändert. In Gl. (1,24) dagegen dürfen wir die  $\mathfrak{A}^*$  enthaltenden Glieder durch ihre konjugiert-komplexen ersetzen, da hierbei nur der Imaginärteil von  $\mathfrak{J}^{(2)}$  verändert wird. Unter Berücksichtigung von (1,25) nimmt dabei Gl. (1,24) die Gestalt an:

$$(1,26) \quad \mathfrak{J}^{(2)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \sum_n \left[ \frac{i_{0n}(\mathbf{r}) \int (\mathfrak{A}'(\mathbf{r}', t), i_{0n}^*(\mathbf{r}')) d\mathbf{r}'}{h(\nu_{n0} - \nu)} + \frac{i_{0n}^*(\mathbf{r}) \int (\mathfrak{A}'(\mathbf{r}', t), i_{0n}(\mathbf{r}')) d\mathbf{r}'}{h(\nu_{n0} + \nu)} \right].$$

Damit haben wir in den Gl. (1,15) und (1,26) handliche Ausdrücke für die beiden Anteile der Stromdichte  $\mathfrak{J}$  erhalten, die durch ein (durch sein Vektorpotential  $\mathfrak{A}$  beschriebenes) Wechselfeld im Kristall induziert wird. Wir wollen diese beiden Gleichungen noch umformen, indem wir an Stelle von  $\mathfrak{A}$  die elektrische Feldstärke

$$(1,27) \quad \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = -\frac{2\pi i \nu}{c} \mathfrak{A}$$

und an Stelle von  $\mathfrak{J}$  die durch die Gleichung

$$(1,28) \quad \mathfrak{J} = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} = 2\pi i \nu \mathfrak{P},$$

definierte „dielektrische Polarisisation“  $\mathfrak{P}$  einführen. Die Maxwell'schen Gleichungen nehmen bei dieser Substitution die gleiche Form an, wie in der makroskopischen Elektrodynamik des Dielektrikums, nämlich

$$(1,29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}; \quad \text{div } \mathfrak{D} = 0, \\ \text{rot } \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}; \quad \text{div } \mathfrak{E} = 0, \end{array} \right.$$

wobei  $\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi \mathfrak{P}$  gesetzt ist, und an Stelle der beiden Anteile  $\mathfrak{J}^{(1)}$  Gl. (1,15) und  $\mathfrak{J}^{(2)}$  Gl. (1,26) der Stromdichte erhalten wir

zwei Anteile  $\mathfrak{P}^{(1)}$  und  $\mathfrak{P}^{(2)}$  der Polarisation  $\mathfrak{P}$ . Für den ersteren ergibt sich dabei eine Gleichung der Form

(1,30)

$$4\pi \mathfrak{P}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \chi(\mathbf{r}) \mathfrak{E}(\mathbf{r}, t)$$

wobei

(1,31)

$$\chi(\mathbf{r}) = -\frac{e q(\mathbf{r})}{\pi m \nu^2},$$

eine dreifachperiodische Suszeptibilität darstellt<sup>1)</sup>. Bei genügend hohen Frequenzen, wo der zweite Anteil  $\mathfrak{P}^{(2)}$  der Polarisation zu vernachlässigen ist, beschreibt Gl. (1,30) zusammen mit (1,31) und den Maxwell'schen Gl. (1,29) die kohärente Streuung von Röntgenstrahlen, und zwar ist dies die klassische Streuung freier Elektronen, deren räumliche Verteilung der wellenmechanischen Ladungsdichte entspricht. Dies ist das bereits von M. Kohler gefundene Ergebnis<sup>2)</sup>. Für den zweiten Anteil  $\mathfrak{P}^{(2)}$  der Polarisation ergibt sich nach Gl. (1,26)

$$(1,32) \quad 4\pi \mathfrak{P}^{(2)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\pi \nu^2} \sum_n \left[ \frac{i_{0n}(\mathbf{r}) \int (\mathfrak{E}(\mathbf{r}', t), i_{0n}^*(\mathbf{r}')) d\mathbf{r}'}{h(\nu_{n0} - \nu)} + \frac{i_{0n}^*(\mathbf{r}) \int (\mathfrak{E}(\mathbf{r}', t), i_{0n}(\mathbf{r}')) d\mathbf{r}'}{h(\nu_{n0} + \nu)} \right].$$

Diese Gleichung läßt sich formal in folgender Weise schreiben:

(1,33)

$$4\pi \mathfrak{P}^{(2)}(\mathbf{r}, t) = \int_V A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathfrak{E}(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}'.$$

Dabei ist die Integration über das gesamte Kristallvolumen  $V$  zu erstrecken. Die Größe  $A(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  stellt eine Art von Integralkern mit Tensorcharakter dar:

$$(1,34) \quad A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\pi \nu^2} \sum_n \left[ \frac{\{i_{0n}(\mathbf{r}); i_{0n}^*(\mathbf{r}')\}}{h(\nu_{n0} - \nu)} + \frac{\{i_{0n}^*(\mathbf{r}); i_{0n}(\mathbf{r}')\}}{h(\nu_{n0} + \nu)} \right],$$

wobei die Klammerausdrücke der Form  $\{\mathfrak{A}; \mathfrak{B}\}$  Tensoren (dyadische Produkte) mit den Komponenten  $\{\mathfrak{A}; \mathfrak{B}\}_{xy} = \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_y$  bedeuten.

Der Anteil  $\mathfrak{P}^{(2)}$  nach Gl. (1,33) ist, wie sich zeigen wird, bei Röntgenfrequenzen nahe den Absorptionskanten wesentlich. Wie man sieht, ist es in diesem Frequenzbereich nicht mehr möglich,

1) Die Suszeptibilität ist nach Gl. (1,30) hier so definiert, daß sie  $4\pi \mathfrak{P}$  anstatt wie sonst üblich  $\mathfrak{P}$  mit der Feldstärke  $\mathfrak{E}$  verknüpft. Dadurch wird in den Endformeln das Auftreten lästiger Faktoren  $4\pi$  vermieden. Wir betonen, daß in dieser Arbeit das übliche elektrostatische und nicht das Lorentzsche Maßsystem benutzt wird; es erscheinen also in den Formeln alle Größen, insbesondere auch die elektrische Elementarladung  $e$  in den üblichen elektrostatischen Einheiten.  $e$  bedeutet in dieser Arbeit (außer die Basis der natürlichen Logarithmen) die Ladung des Elektrons, also „minus Elementarladung“.

2) Vgl. M. Kohler, a. a. O.

den Kristall einfach durch eine dielektrische Suszeptibilität zu charakterisieren, welche wie in Gl. (1,30) die Polarisierung  $\mathfrak{P}$  an einer Stelle  $\mathbf{r}$  mit der elektrischen Feldstärke  $\mathfrak{E}$  an der gleichen Stelle  $\mathbf{r}$  verknüpft; vielmehr hängt nach Gl. (1,33) die Polarisierung  $\mathfrak{P}(\mathbf{r})$  an einer Stelle  $\mathbf{r}$  von der elektrischen Feldstärke  $\mathfrak{E}(\mathbf{r}')$  an verschiedenen Stellen  $\mathbf{r}'$ , über welche integriert wird, ab. (Strenggenommen kommt es dabei auf den Verlauf der Feldstärke  $\mathfrak{E}$  im ganzen Kristall an, praktisch jedoch, wie sich zeigen wird, jeweils nur auf einen kleinen Bereich von atomarer Größenordnung in der Umgebung der jeweiligen Stelle  $\mathbf{r}$ .) Gl. (1,33) stellt also eine wesentliche Erweiterung des v. Laueschen Ansatzes dar, die jedoch, wie im folgenden Paragraphen gezeigt wird, nur eine einfache formale Änderung der v. Laueschen Grundgleichungen zur Folge hat.

## § 2. Ableitung der modifizierten Grundgleichungen der v. Laueschen dynamischen Theorie der Röntgenstrahlinterferenzen

Wir schreiben nach v. Laue<sup>1)</sup> die Feldvektoren als 3fache Fourierreihen (genauer: durch 3fache Fourierreihen modulierte ebene Wellen):

$$(2,1) \quad \mathfrak{E} = \sum_q \mathfrak{E}_q e^{-2\pi i(\mathfrak{R}_q, \mathbf{r})} e^{2\pi i \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}},$$

und entsprechende Ausdrücke für die übrigen Feldgrößen  $\mathfrak{P}, \mathfrak{D}$  usw. Dabei sind die Ausbreitungsvektoren  $\mathfrak{R}_q$  gemäß

$$\mathfrak{R}_q = \mathfrak{R}_0 + \mathfrak{b}_q$$

miteinander verknüpft, wobei  $\mathfrak{b}_q$  die reziproken Gittervektoren sind. Die Möglichkeit des Ansatzes (2,1) ergibt sich aus der Tatsache, daß die Gl. (1,29), (1,30) und (1,33) linear und homogen in den Feldgrößen sind, zusammen mit den Periodizitätsbedingungen

$$\chi(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = \chi(\mathbf{r})$$

und

$$A(\mathbf{r} + \mathbf{a}, \mathbf{r}' + \mathbf{a}) = A(\mathbf{r}, \mathbf{r}'),$$

wobei  $\mathbf{a}$  einen Gittervektor bedeutet. — Weiter entwickeln wir die Suszeptibilität  $\chi(\mathbf{r})$  der Gl. (1,31) in eine 3fache Fourierreihe:

$$(2,2) \quad \chi(\mathbf{r}) = \sum_i \chi_i e^{-2\pi i(\mathfrak{b}_i, \mathbf{r})}$$

deren Fourierkoeffizienten gemäß

$$(2,3) \quad \chi_i = \frac{1}{d} \int \chi(\mathbf{r}) e^{2\pi i(\mathfrak{b}_i, \mathbf{r})} d\mathbf{r}$$

1) Vgl. M. v. Laue, a. a. O.



aus (1,31) zu berechnen sind. Die Integration ist dabei über die Gitterzelle  $A$  zu erstrecken. Mit den Entwicklungen (2,1) und (2,2) folgt aus Gl. (1,30) die Beziehung zwischen den Fourierkomponenten der Feldgrößen  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{E}$ :

$$(2,4) \quad 4\pi \mathfrak{P}_m^{(1)} = \sum_q \chi_{m-q} \mathfrak{E}_q.$$

Ferner multiplizieren wir die Fourierreihe (2,1) für  $\mathfrak{P}^{(2)}$ :

$$\mathfrak{P}^{(2)}(\mathbf{r}) = \sum_q \mathfrak{P}_q^{(2)} e^{-2\pi i(\mathfrak{R}_q, \mathbf{r})} e^{2\pi i \nu t}$$

mit  $e^{2\pi i(\mathfrak{R}_m, \mathbf{r})}$  und mitteln das Ergebnis räumlich. Es würde dabei genügen, die Mittelung über eine Gitterzelle zu erstrecken, doch wollen wir, um die Endgleichungen symmetrischer zu gestalten, über das ganze Kristallvolumen  $V$  mitteln. Wegen  $\mathfrak{R}_m - \mathfrak{R}_q = \mathfrak{b}_{m-q}$  verschwinden dabei alle Glieder außer dem mit  $q = m$ , so daß sich ergibt

$$\mathfrak{P}_m^{(2)} = \frac{1}{V} \int_V \mathfrak{P}^{(2)}(\mathbf{r}) e^{2\pi i(\mathfrak{R}_m, \mathbf{r})} d\mathbf{r} e^{-2\pi i \nu t}.$$

Setzt man hier  $\mathfrak{P}^{(2)}(\mathbf{r})$  nach Gl. (1,33) und anschließend für  $\mathfrak{E}(\mathbf{r}')$  die Fourierreihe (2,1) ein, so ergibt sich

$$4\pi \mathfrak{P}_m^{(2)} = \frac{1}{V} \int_V \int_V A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sum_q \mathfrak{E}_q e^{2\pi i(\mathfrak{R}_m \mathbf{r} - \mathfrak{R}_q \mathbf{r}')} d\mathbf{r} d\mathbf{r}'.$$

Durch Vertauschung der Reihenfolge von Summation und Integration erhält diese Gleichung die Form

$$(2,5) \quad 4\pi \mathfrak{P}_m^{(2)} = \sum_q A_{mq} \mathfrak{E}_q,$$

wobei

$$(2,6) \quad A_{mq} = \frac{1}{V} \int_V \int_V A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{2\pi i(\mathfrak{R}_m \mathbf{r} - \mathfrak{R}_q \mathbf{r}')} d\mathbf{r} d\mathbf{r}'$$

oder mit Benutzung des Ausdrucks (1,34) für  $A(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$

$$(2,7) \quad A_{mq} = \frac{1}{\pi \nu^2 V} \sum_n \int_V \int_V \left[ \frac{\{j_{0n}(\mathbf{x}); j_{0n}^*(\mathbf{r}')\}}{h(\nu_{n0} - \nu)} + \frac{\{j_{0n}^*(\mathbf{x}); j_{0n}(\mathbf{r}')\}}{h(\nu_{n0} + \nu)} \right] e^{2\pi i(\mathfrak{R}_m \mathbf{r} - \mathfrak{R}_q \mathbf{r}')} d\mathbf{r} d\mathbf{r}'$$

ist. Es sei sogleich bemerkt, daß die Koeffizienten  $A_{mq}$  nicht vom Kristallvolumen  $V$  abhängen, wie weiter unten gezeigt werden wird. Für die Fourierkomponenten der gesamten Polarisation  $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^{(1)} + \mathfrak{P}^{(2)}$  ergibt sich nach (2,4) und (2,5):

$$(2,8) \quad 4\pi \mathfrak{P}_m = \sum_q C_{mq} \mathfrak{E}_q,$$

wobei zur Abkürzung

$$(2,9) \quad C_{mq} = \chi_{m-q} + A_{mq}$$

gesetzt ist. Nach Gl. (2,7) sind die Koeffizienten  $A_{mq}$  und damit auch die  $C_{mq}$  im allgemeinen Tensoren. — Es ist zweckmäßig, an Stelle der elektrischen Feldstärke  $\mathfrak{E}$  die dielektrische Verschiebung  $\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{P}$  einzuführen, weil wegen  $\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0$  die Fourierkomponenten  $\mathfrak{D}_m$  senkrecht auf den zugehörigen Ausbreitungsvektoren  $\mathfrak{R}_m$  stehen, d. h. die Partialwellen von  $\mathfrak{D}$  rein transversal sind. Da bei Röntgenstrahlen  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{E}$  sehr nahezu übereinstimmen, dürfen wir in (2,8) einfach die  $\mathfrak{E}_q$  durch  $\mathfrak{D}_q$  ersetzen, so daß wir erhalten

$$(2,10) \quad 4\pi\mathfrak{P}_m = \sum_q C_{mq} \mathfrak{D}_q.$$

[Genau genommen wäre in (2,10)  $C_{mq}$  durch eine Reihe

$$C'_{mq} = C_{mq} - \sum_r C_{mr} C_{rq} + \dots$$

zu ersetzen, doch ist dies praktisch belanglos, da die  $C_{mq}$  für Röntgenstrahlen von der Größenordnung  $10^{-6}$  sind.]

Schließlich sind noch die Maxwell'schen Gleichungen (1,29) in Fourierkomponenten umzuschreiben. Eliminiert man aus (1,29) die magnetische Feldstärke  $\mathfrak{H}$  und ersetzt  $\mathfrak{E}$  durch  $\mathfrak{D} - 4\pi\mathfrak{P}$  und setzt in die entstehende Beziehung zwischen  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{D}$  die Fourierreihen (2,1) ein, so erhält man für die Fourierkomponenten die Beziehung

$$(2,11) \quad \left(1 - \frac{k^2}{\mathfrak{R}_m^2}\right) \mathfrak{D}_m = 4\pi\mathfrak{P}_{m \perp \mathfrak{R}_m},$$

wobei

$$(2,12) \quad k = \frac{\nu}{c} \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_{m \perp \mathfrak{R}_m} = \mathfrak{P}_m - \frac{(\mathfrak{P}_m, \mathfrak{R}_m)}{\mathfrak{R}_m^2} \mathfrak{R}_m$$

den Anteil des Vektors  $\mathfrak{P}_m$  bedeutet, der senkrecht auf  $\mathfrak{R}_m$  steht. Setzt man  $\mathfrak{P}_m$  nach (2,10) in (2,11) ein, so ergibt sich <sup>1)</sup>

$$(2,13) \quad \boxed{\left(1 - \frac{k^2}{\mathfrak{R}_m^2}\right) \mathfrak{D}_m = \sum_q [C_{mq} \mathfrak{D}_q]_{\perp \mathfrak{R}_m}}.$$

1) Eliminiert man nicht die  $\mathfrak{P}_m$  sondern statt dessen die  $\mathfrak{D}_m$  aus (2,10) und (2,11), so erhält man eine andere Form der Grundgleichungen, die derjenigen ähnlich ist, die P. P. Ewald, der nach M. v. Laues Vorgang ebenfalls den Übergang zum kontinuierlich verteilten Streuvermögen vollzogen hat, benutzt.

Dies sind die verallgemeinerten Grundgleichungen der v. Laueschen dynamischen Theorie der Röntgenstrahlinterferenzen. Ausdrücklich sei betont, daß die Koeffizienten  $C_{mq}$  sich im allgemeinen nicht als Fourierkoeffizienten einer dreifachperiodischen Suszeptibilität auffassen lassen. Nur im Fall von Röntgenstrahlen genügend hoher Frequenz, nämlich bei genügender Entfernung von den  $K$ -Kanten der am Gitteraufbau beteiligten Atome, können die Größen  $A_{mq}$  in Gl. (2,9) vernachlässigt und die  $C_{mq}$  somit durch die Fourierkoeffizienten  $\chi_{m-q}$  nach Gl. (2,3) ersetzt werden. In diesem Fall nimmt die Gl. (2,13) die ursprünglich von M. v. Laue eingeführte Form der Grundgleichungen an<sup>1)</sup>.

### § 3. Ergänzungen auf Grund der Diracschen Strahlungstheorie: inkohärente Streustrahlung und Absorption

Die im § 1 dieser Arbeit benutzte Methode der quantenmechanischen Störungsrechnung, bei der das Röntgenwellenfeld als Störungspotential in die Schrödingergleichung der Elektronen eingesetzt wird, liefert (jedenfalls in der von uns durchgeführten ersten Näherung) nur die kohärente Röntgenstreuung. Die inkohärente (Fluoreszenz-) Streustrahlung geänderter Frequenz erhält man mit, wenn man statt dessen die Diracsche Strahlungstheorie benutzt. Die Anwendung der Diracschen Strahlungstheorie auf das Problem der Streuung von Röntgenstrahlen in Kristallen beabsichtigt der Verf. in einer späteren Arbeit, die sich speziell mit der inkohärenten Röntgenstreuung befassen soll, ausführlich zu behandeln.

Wir gehen an dieser Stelle überhaupt darauf ein, weil sich nach der Strahlungstheorie zugleich gewisse Ergänzungen unserer im § 1 erhaltenen Formeln für die *kohärente* Streuung — nämlich gewisse Zusatzglieder in den Resonanznennern — ergeben, auf die es uns hier ankommt. Das Auftreten inkohärenter Streustrahlung hat nämlich *Strahlungsdämpfung* und infolgedessen Absorption der Primärstrahlung zur Folge. Wir erinnern in diesem Zusammenhang an die klassische Dispersionstheorie, nach der im Resonanznenner im Ausdruck für die Polarisierbarkeit eines Atoms (d. h. dort: eines „elastisch gebundenen Elektrons“) ein imaginäres „Dämpfungsglied“ auftritt als Folge davon, daß dieses Atom Streustrahlung emittieren kann. Genau das gleiche ergibt sich nach der Diracschen Strahlungstheorie, und zwar ergibt diese, daß die Resonanznenner

$$\hbar(\nu_{n_0} - \nu)$$

1) Vgl. M. v. Laue, a. a. O.

in dem Ausdruck  $A(\tau, \tau')$  unserer Gl. (1,34) (der ja eine verallgemeinerte Polarisierbarkeit des Kristalls darstellt) durch solche der Form

$$h(\nu_{n0} - \nu) + i b$$

mit positivem  $b$  zu ersetzen sind<sup>1)</sup>. Die Größe der „Linienbreite“  $b$  läßt sich an und für sich nach der Diracschen Strahlungstheorie berechnen. Sie ist jedoch sehr klein, und es kommt aus folgendem Grunde auf deren genaue Größe gar nicht an: nach einem Satze der klassischen Dispersionstheorie absorbiert eine Resonanzstelle aus einem Kontinuum eingestrahelter Frequenzen immer die gleiche Energie heraus, unabhängig von der Linienbreite<sup>2)</sup>. In unserem Falle haben wir zwar nur eine einzige eingestrahlte Frequenz  $\nu$ , dafür aber ein Kontinuum von Resonanzstellen, und das kommt auf das gleiche heraus. Wir werden daher nach Ausführung der Summation über  $n$  in Gl. (1,34) (die wir durch eine Integration ersetzen werden) zur Grenze  $b \rightarrow 0$  übergehen. Einzig auf die mehr oder minder sprunghafte Änderung der Absorption an den Absorptionskanten kann die Größe von  $b$  einen Einfluß haben. Die experimentelle Tatsache, daß sich die Absorption an den Kanten praktisch völlig sprunghaft ändert, zeigt, daß der Grenzfall  $b \rightarrow 0$  eine gute Näherung darstellt (vgl. § 5).

#### § 4. Einführung Hartreescher Näherung

Um die Koeffizienten  $A_{m,q}$  nach Gl. (2,7) eingehend diskutieren zu können, führen wir Hartreesche Näherung ein, d. h. wir setzen die Eigenfunktionen  $u_n$  der Kristallelektronen als Produkte von Eigenfunktionen  $\psi_i$  des einzelnen Elektrons im Felde der Kerne und der übrigen Elektronen an. Die  $\psi_i$  nehmen wir als zueinander orthogonal und auf das Kristallvolumen  $V$  normiert an, gemäß

$$(4,1) \quad \int_V \psi_i^* \psi_k d\tau = \delta_{ik}.$$

Ist  $N$  die Anzahl der Kristallelektronen, so sind die Zustände  $u_n$  des gesamten Elektronensystems dadurch gegeben, daß jeweils  $N$  bestimmte Zustände  $\psi_i$  mit je einem Elektron besetzt sind. Speziell sei die Eigenfunktion  $u_0$  des Grundzustandes:

$$(4,2) \quad u_0 = \psi_1(\mathbf{r}_1) \cdot \psi_2(\mathbf{r}_2) \dots \psi_i(\mathbf{r}_i) \dots \psi_N(\mathbf{r}_N).$$

Zum Unterschiede wollen wir im folgenden die im Grundzustande besetzten  $\psi_i$  mit lateinischem Index  $i$  und die im Grundzustande

1) P. A. M. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics, 2. Aufl. Oxford 1935, Kap. XI.

2) Vgl. R. Becker, Theorie der Elektrizität II, § 26, S. 141.

unbesetzten  $\psi_\sigma$  mit griechischem Index  $\sigma$  bezeichnen. Die angeregten Zustände  $u_n$  gehen aus (4,2) hervor, indem ein oder mehrere  $\psi_i$  durch vorher unbesetzte  $\psi_\sigma$  ersetzt werden. Die Eigenfunktion desjenigen Zustandes  $u_n$ , bei dem ein Zustand  $\psi_i$  durch einen Zustand  $\psi_\sigma$  ersetzt ist, lautet also

$$(4,3) \quad u_{i\sigma} = \psi_1(r_1) \cdot \psi_2(r_2) \dots \psi_\sigma(r_i) \dots \psi_N(r_N),$$

wobei an Stelle des einen Indexes  $n$  jetzt die beiden Indizes  $i$  und  $\sigma$  treten. Für das Stromdichtematrixelement, das dem Übergang  $u_0 \rightarrow u_{i\sigma}$  zugeordnet ist, erhält man nach Gl. (1,17) bei Berücksichtigung von (4,1) die Gleichung

$$(4,4) \quad j_{i\sigma} = \frac{e\hbar}{4\pi i m} (\psi_\sigma \text{ grad } \psi_i^* - \psi_i^* \text{ grad } \psi_\sigma).$$

Setzt man nämlich  $u_{i\sigma}$  für  $u_n$  in Gl. (1,17) ein, so verschwinden dort in der Summe über  $k$  wegen der Orthogonalität der  $\psi_i$  und  $\psi_\sigma$  alle Glieder außer dem mit  $k=i$ . Aus dem gleichen Grunde verschwinden diejenigen Strommatrixelemente, die Übergängen aus dem Grundzustand  $u_0$  zu solchen angeregten Zuständen entsprechen, in denen mehrere Elektronen angeregt sind. Es kommen also nur Übergänge zu Zuständen in Betracht, bei denen jeweils nur ein Elektron angeregt ist<sup>1)</sup>. (An diesen Ergebnissen ändert sich übrigens nichts, wenn man die Eigenfunktionen nicht einfach in Produktform gemäß (4,2) und (4,3), sondern als antisymmetrisierte Produkte in Determinantenform ansetzt, da unser Ansatz wegen der Orthogonalität der  $\psi_i$  und  $\psi_\sigma$  und wegen der einfachen Besetzung schon an sich dem Pauliprinzip genügt.)

Nach Gl.(2,7) ergibt sich nunmehr mit (4,4) für die Koeffizienten  $A_{mq}$  der Ausdruck:

$$(4,5) \quad \left\{ A_{mq} = \frac{2}{\pi v^2 V} \sum_{i,\sigma} \int_V \int_V \cdot \left[ \frac{\{ j_{i\sigma}(r); j_{i\sigma}(r') \}}{h(v_{\sigma i} - v)} + \frac{\{ j_{i\sigma}(r); j_{i\sigma}(r') \}}{h(v_{\sigma i} + v)} \right] e^{2\pi i (\mathbf{R}_m r - \mathbf{R}_q r')} d\mathbf{r} d\mathbf{r}', \right.$$

wobei  $h v_{\sigma i} = E_\sigma - E_i$  die Differenz der den Zuständen  $\psi_\sigma$  und  $\psi_i$  zugehörigen Energiewerte ist. Wegen der 2fachen Spinorientierung ist in (4,5) ein Faktor 2 vor die Summe gezogen worden und die Summation über  $i$  und  $\sigma$  ist nunmehr ohne Berücksichtigung der Spinorientierung zu verstehen. (Es ist ein Faktor 2 und nicht etwa ein Faktor 4 vorzuziehen, da Übergänge zwischen Zuständen mit

1) Die Annahme orthogonaler  $\psi_i$  ist nicht ganz streng gerechtfertigt; bei Berücksichtigung der „Fastorthogonalität“ würden, wie bereits H. Hönl bemerkt hat, auch Terme auftreten, die der Anregung von mehreren Elektronen zugleich zugeordnet sind, doch dürfte deren Einfluß klein sein.

entgegengesetzter Spinorientierung nicht vorkommen, d. h. die zugehörigen Strommatrixelemente verschwinden.) Die Summation über  $i$  in Gl. (4,5) ist über die im Grundzustande besetzten und die Summation über  $\sigma$  über die im Grundzustande unbesetzten Zustände zu erstrecken; nur zwischen besetzten und unbesetzten Zuständen kommen also Übergänge vor, was hier zwanglos aus dem Ansatz für die Eigenfunktionen  $u_n$  folgt. Die Gesamtheit der im Grundzustande besetzten Zustände  $\psi_i$  zerlegen wir in Gruppen entsprechend den verschiedenen ( $K$ -,  $L$ - usw.) Schalen der verschiedenen, das Gitter aufbauenden Atome, folgendermaßen: der Index  $s$  nummeriere die Basisatome (d. h. die Atome der 0-ten Gitterzelle); jedem Basisatom entspricht ein einfaches Teilgitter, das aus diesem durch Translation um die Gittervektoren hervorgeht. Es seien z. B.  $\psi_i^{K_s}$  die  $K$ -Zustände des  $s$ -ten Teilgitters. Die Größe  $A_{mq}$  nach Gl. (4,5) können wir dann folgendermaßen zerlegen:

$$(4,6) \quad A_{mq} = \sum_s (A_{mq}^{K_s} + A_{mq}^{L_s} + \dots).$$

Die verschiedenen Anteile von  $A_{mq}$  sind von der gleichen Form, wie das gesamte  $A_{mq}$  nach Gl. (4,5) mit dem Unterschiede, daß die Summation über  $i$  jeweils nur über die betreffende Gruppe von Eigenfunktionen  $\psi_i$  zu erstrecken ist, z. B. bei dem Anteil  $A_{mq}^{K_s}$ , den wir im folgenden als Beispiel näher betrachten werden, über die  $\psi_i^{K_s}$ .

Wir haben bisher Eigenfunktionen  $\psi$  mit diskreten Indizes  $i, \sigma$  numeriert, entsprechend der Tatsache, daß bei endlichem Kristallvolumen  $V$  die zugehörigen Energiewerte ein diskretes Spektrum darstellen. Da jedoch das Kristallvolumen groß gegenüber atomaren Dimensionen ist, liegen die Eigenwerte sehr dicht, und man pflegt daher die Eigenfunktionen  $\psi(\mathbf{f})$  und die zugehörigen Energieeigenwerte  $E(\mathbf{f})$  durch einen kontinuierlich veränderlichen Wellenvektor  $\mathbf{f}$  zu charakterisieren. Die Eigenschaften der  $\psi(\mathbf{f})$  seien hier kurz zusammengestellt<sup>1)</sup>: Die  $\psi(\mathbf{f})$  stellen dreifachperiodisch modulierte ebene Wellen dar, sind also von der Form

$$(4,7) \quad \psi(\mathbf{f}, \mathbf{r}) = \sum_i c_i(\mathbf{f}) e^{-2\pi i (\mathbf{f} + \mathbf{b}_i, \mathbf{r})}.$$

Zur Normierung wählt man zweckmäßig die Bedingung

$$(4,8) \quad \sum_i |c_i|^2 = 1$$

entsprechend einer mittleren Dichte von einem Elektron pro Volumeneinheit, so daß die  $\psi(\mathbf{f})$  vom Kristallvolumen unabhängig sind. Bei großen  $|\mathbf{f}|$  haben

1) Vgl. z. B. den Artikel von A. Sommerfeld u. H. Bethe im Handb. d. Phys. XXIV/2. Unser Wellenvektor  $\mathbf{f}$  ist der dort als „freier“ Wellenvektor bezeichnete.

die  $\psi(\mathbf{f})$  angenähert die Form ebener Wellen und für die zugehörigen Energiewerte gilt angenähert:

$$(4,9) \quad E(\mathbf{f}) = \frac{\hbar^2}{2m} |\mathbf{f}|^2.$$

An gewissen („Bragg-Brillouinschen“) Ebenen im  $\mathbf{f}$ -Raum, die durch die Bedingung  $(\mathbf{f}, \mathbf{b}_i) = \frac{1}{2} b_i^2$  charakterisiert sind, springt jedoch die Energie  $E(\mathbf{f})$ , und zwar in dem Sinne, daß jeweils ein Energiebereich ausgelassen wird. Die dadurch entstehenden „verbotenen“ Energiebänder sind bei großen  $|\mathbf{f}|$  sehr schmal; bei Übergang zu kleineren  $|\mathbf{f}|$  werden sie breiter, und die „erlaubten“ Energiebänder werden entsprechend schmaler und ziehen sich schließlich bei den Zuständen, die den innersten Schalen entsprechen, praktisch zu scharfen Linien zusammen. Die diesen innersten Schalen zugehörigen Eigenfunktionen sind praktisch identisch mit den entsprechenden Eigenfunktionen der freien Atome (bzw. einfache Linearkombinationen derselben).

Da uns hier gerade diese Elektronenzustände der innersten Schalen in erster Linie interessieren, werden wir für die im Grundzustande besetzten  $\psi_i^{K_s}$  usw. die diskrete Zählung beibehalten und nur die im Grundzustande unbesetzten  $\psi_\sigma$  durch die kontinuierlichen  $\psi(\mathbf{f})$  nach Gl. (4,7) ersetzen. Die Strommatrixelemente (4,4) nehmen dann die Form an

$$(4,10) \quad j_i^{K_s}(\mathbf{f}) = \frac{e\hbar}{4\pi i m} (\psi(\mathbf{f}) \text{ grad } \psi_i^{K_s} - \psi_i^{K_s} \text{ grad } \psi(\mathbf{f})).$$

Der Anteil  $A_{mq}^{K_s}$  von  $A_{mq}$  entsteht, indem an Stelle von  $i_\sigma$  in Gl. (4,5) der Ausdruck (4,10), und zwar genauer [wegen der verschiedenen Normierung der  $\psi_i$  nach (4,1) und der  $\psi(\mathbf{f})$  nach (4,8)]  $\frac{1}{V} \cdot i_i^{K_s}(\mathbf{f})$  eingesetzt wird. Zugleich tritt an die Stelle der Summation über  $\sigma$  die Integration über den im Grundzustande unbesetzten Teil des  $\mathbf{f}$ -Raumes, wobei noch mit der Dichte  $V$  (= Kristallvolumen) der Zustände im  $\mathbf{f}$ -Raum zu multiplizieren ist. — Unter  $\psi_i^{K_s}$  in (4,10) wollen wir die Eigenfunktionen des  $K$ -Zustandes des in der  $i$ -ten Gitterzelle befindlichen Atoms der Sorte  $s$  verstehen. Der Index  $i$  numeriert daher jetzt einfach die Gitterzellen. Man erkennt nun leicht, daß alle Summanden  $i$  in  $A_{mq}^{K_s}$  einander gleich sind; denn es gilt die Beziehung  $\psi_0^{K_s}(\mathbf{r}) = \psi_i^{K_s}(\mathbf{r} + \mathbf{a}_i)$ , wo  $\mathbf{a}_i$  ein Gittervektor ist. Ersetzt man im  $i$ -ten Summanden von  $A_{mq}^{K_s}$  nach Gl. (4,5) zugleich  $\mathbf{r}$  durch  $\mathbf{r} + \mathbf{a}_i$  und  $\mathbf{r}'$  durch  $\mathbf{r}' + \mathbf{a}_i$ , so geht dort nach (4,10) und (4,7)  $\psi_i^{K_s}$  in  $\psi_0^{K_s} \cdot e^{-2\pi i (\mathbf{f}, \mathbf{a}_i)}$  und zugleich der Faktor  $e^{2\pi i (\mathbf{R}_m \mathbf{r} - \mathbf{R}_q \mathbf{r}')} in sich über, woraus das Gesagte folgt. Wir dürfen daher alle Summanden  $i$  durch den 0-ten und die Summation über  $i$  durch Multiplikation mit der$



Anzahl  $V/\Delta$  der Gitterzellen ersetzen. Wir erhalten somit für den  $K_s$ -Anteil von  $A_{mq}$  den Ausdruck:

$$(4,11) \quad \left\{ \begin{aligned} A_{mq}^{K_s} = & \frac{2}{\pi \nu^2 \Delta} \int_V d\tau \int_V d\tau' \left[ \frac{\{i_0^{K_s}(\mathfrak{k}, \tau); i_0^{K_s*}(\mathfrak{k}', \tau')\}}{E(\mathfrak{k}) - E_{K_s} - h\nu} \right. \\ & \left. + \frac{\{i_0^{K_s*}(\mathfrak{k}, \tau); i_0^{K_s}(\mathfrak{k}', \tau')\}}{E(\mathfrak{k}) - E_{K_s} + h\nu} \right] e^{2\pi i (\mathfrak{R}_m \tau - \mathfrak{R}_q \tau')}, \end{aligned} \right.$$

wobei  $E_{K_s}$  den Energiewert der  $K$ -Zustände des  $s$ -ten Teilgitters bedeutet. Führen wir zur Abkürzung die Vektoren

$$(4,12) \quad \mathfrak{K}^{K_s}(\mathfrak{k}, \mathfrak{R}_m) = \int_V i_0^{K_s}(\mathfrak{k}, \tau) e^{2\pi i (\mathfrak{R}_m, \tau)} d\tau$$

ein, so erhalten wir statt (4,11)<sup>1)</sup>:

$$(4,13) \quad \left\{ \begin{aligned} A_{mq}^{K_s} = & \frac{2}{\pi \nu^2 \Delta} \int \left[ \frac{\{\mathfrak{K}^{K_s}(\mathfrak{k}, \mathfrak{R}_m); \mathfrak{K}^{K_s*}(\mathfrak{k}, \mathfrak{R}_q)\}}{E(\mathfrak{k}) - E_{K_s} - h\nu} \right. \\ & \left. + \frac{\{\mathfrak{K}^{K_s*}(\mathfrak{k}, -\mathfrak{R}_m); \mathfrak{K}^{K_s}(\mathfrak{k}, -\mathfrak{R}_q)\}}{E(\mathfrak{k}) - E_{K_s} + h\nu} \right] d\tau_{\mathfrak{k}}. \end{aligned} \right.$$

#### § 5. Unterteilung der Koeffizienten $A_{mq}$ in Streu- und Absorptionsanteil

Ehe wir die Tensoreigenschaften der Koeffizienten  $A_{mq}$  diskutieren, müssen wir auf eine Schwierigkeit bei der Integration bezüglich  $\mathfrak{k}$  in (4,13) eingehen, die darin besteht, daß der Integrand längs der Fläche im  $\mathfrak{k}$ -Raum

$$(5,1) \quad E(\mathfrak{k}) = E_{K_s} + h\nu = E_0$$

singulär ist. [Diese Schwierigkeit tritt natürlich nur dann auf, wenn die Fläche (5,1) in den Integrationsbereich fällt, d. h. wenn der Energiewert  $E_0$  nicht vollständig in ein „verbotenes“ Energieband und auch nicht in den im Grundzustand  $u_0$  von Elektronen besetzten Bereich des  $\mathfrak{k}$ -Raumes fällt.] Wir denken uns die Fläche (5,1) von zwei benachbarten Flächen

$$(5,2) \quad \left\{ \begin{aligned} & E(\mathfrak{k}) = E_0 + \varepsilon \\ \text{und} & E(\mathfrak{k}) = E_0 - \varepsilon. \end{aligned} \right.$$

( $E_0$  steht zur Abkürzung für  $E_{K_s} + h\nu$ ) eingeschlossen, und unterteilen den Integrationsbereich von  $\mathfrak{k}$  in zwei Teilbereiche, folgender-

1) Die Schreibweise (4,13) ist strenggenommen nur dann richtig, wenn man voraussetzt, daß die Vektoren  $\mathfrak{R}_m$  in (4,12) reell sind. Im II. Teil dieser Arbeit werden wir zwar auch komplexe  $\mathfrak{R}_m$  in Betracht ziehen, doch werden deren Imaginärteile stets sehr klein sein, so daß sie in (4,13) nicht berücksichtigt zu werden brauchen.

maßen: der Integrationsbereich  $I$  sei der ganze Integrationsbereich (d. h. der im Grundzustand  $u_0$  unbesetzte Teil des  $\mathfrak{f}$ -Raumes) ausschließlich des Bereiches zwischen den beiden Flächen (5,2) und der Integrationsbereich  $II$  sei der von den Flächen (5,2) eingeschlossene kleine Bereich des  $\mathfrak{f}$ -Raumes. Wir zerlegen nun die Größe  $A_{mq}$  in zwei Anteile:

$$(5,3) \quad A_{mq} = A_{mq}^{\text{Str.}} + A_{mq}^{\text{Abs.}}$$

bzw. den als Beispiel betrachteten  $K_s$ -Anteil von  $A_{mq}$ :

$$(5,3,1) \quad A_{mq}^{K_s} = A_{mq}^{K_s, \text{Str.}} + A_{mq}^{K_s, \text{Abs.}}.$$

Dabei verstehen wir unter  $A_{mq}^{K_s, \text{Str.}}$  diejenige Größe, die entsteht, wenn man in (4,13) die Integration bezüglich  $\mathfrak{f}$  über den Integrationsbereich  $I$  erstreckt und anschließend zur Grenze  $\varepsilon \rightarrow 0$  übergeht. Den Anteil  $A_{mq}^{K_s, \text{Abs.}}$  definieren wir (zunächst rein formal) als den Anteil von  $A_{mq}^{K_s}$ , der entsteht, wenn in (4,13) die Integration über den Integrationsbereich  $II$  erstreckt wird, ebenfalls mit anschließendem Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Die Bezeichnung der beiden Anteile (5,3) als Streu- (Str.) und Absorptionsanteil (Abs.) wird im II. Teil dieser Arbeit gerechtfertigt werden.

Die Integration über den Integrationsbereich  $I$  bereitet keine Schwierigkeiten. Bei der Integration über den Integrationsbereich  $II$ , also bei  $A_{mq}^{K_s, \text{Abs.}}$ , tritt die erwähnte Schwierigkeit wegen des singular werdenden Integranden auf. Diese Schwierigkeit verschwindet nun sofort, wenn wir uns an die Ausführungen im § 3 erinnern, wonach auf Grund der Strahlungstheorie die Resonanznenner  $h(\nu_{n0} - \nu)$  durch imaginäre Zusatzglieder  $ib$  mit positivem  $b$  zu ergänzen sind. Ersetzt man demgemäß in (4,13) den Nenner

$$(5,4,1) \quad E(\mathfrak{f}) - E_{K_s} - h\nu$$

durch

$$(5,4,2) \quad E(\mathfrak{f}) - E_{K_s} - h\nu + ib,$$

so tritt bei der Integration keine Schwierigkeit mehr auf, da die Singularitäten ins Imaginäre gerückt sind. Die Integration über den Integrationsbereich  $II$ , d. h. über den Bereich zwischen den beiden Flächen (5,2) führen wir nun folgendermaßen aus: wir betrachten ein Volumenelement dieses Bereiches in Form eines kleinen Zylinders mit der Grundfläche  $d\sigma_{\mathfrak{f}}$ , dessen Achse senkrecht auf der Fläche (5,1) steht (vgl. Abb. 1). Längs der Zylinderachse führen wir eine

Koordinate  $k$ , ein und zwar so, daß der Wert  $k = 0$  auf der Fläche (5,1) liegt und die positive  $k$ -Achse in Richtung wachsender Energiewerte  $E(\mathfrak{k})$  weist; es ist dann

$$(5,5) \quad \frac{\partial E(\mathfrak{k})}{\partial k} = |\text{grad}_{\mathfrak{k}} E(\mathfrak{k})|,$$

wobei  $\text{grad}_{\mathfrak{k}}$  den Gradientenoperator im  $\mathfrak{k}$ -Raum bedeutet. Entwickelt man nun  $E(\mathfrak{k})$  in eine Taylorreihe um  $k = 0$ , so lauten bei Benutzung von (5,5) deren erste Glieder:

$$(5,6) \quad E(\mathfrak{k}) = E_0 + k |\text{grad}_{\mathfrak{k}} E(\mathfrak{k})| + \dots$$

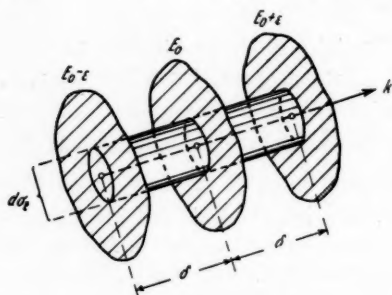


Abb. 1. Das Volumenelement im Integrationsbereich II

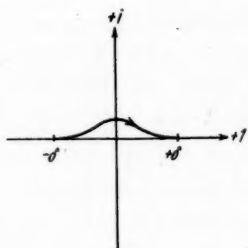


Abb. 2. Der Integrationsweg in der komplexen  $k$ -Ebene

Bei der Integration über den Integrationsbereich II integrieren wir nun zunächst über die Koordinate  $k$ . Nach (4,13) und bei Ersetzung des Resonanznenners (5,4,1) durch (5,4,2) haben wir somit das Integral zu betrachten:

$$(5,7,1) \quad \mathfrak{I} = \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{dk}{E(\mathfrak{k}) - E_0 + i b}.$$

Die Integrationsgrenzen  $k = \pm \delta$  entsprechen dabei den Flächen (5,2), die ja abgesehen von Gliedern höherer Ordnung gleichen Abstand von (5,1) haben. Bei Benutzung der Taylorentwicklung (5,6) geht (5,7,1) über in

$$(5,7,2) \quad \mathfrak{I} = \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{dk}{k \cdot |\text{grad}_{\mathfrak{k}} E(\mathfrak{k})| + i b + \dots}.$$

Nach § 3 ist  $b$  eine kleine positive Zahl, die singuläre Stelle des Integranden vom (5,7,2) liegt also auf der negativ-imaginären Achse nahe dem Ursprung der komplexen  $k$ -Ebene. Solange  $b \neq 0$  ist, kann die Integration über  $k$  ohne Schwierigkeit längs der reellen  $k$ -Achse

geführt werden. Gehen wir nun entsprechend den Ausführungen des § 3 zur Grenze  $b \rightarrow 0$  über, so rückt die singuläre Stelle vom negativ-imaginären her auf die Stelle  $k = 0$  zu. Der Integrationsweg muß daher bei diesem Grenzübergang so deformiert werden, daß er dieser Stelle in die positiv-imaginäre Halbebene hinein ausweicht (vgl. Abb. 2)<sup>1)</sup>. Geht man nun außerdem noch zur Grenze  $\varepsilon \rightarrow 0$  und damit  $\delta \rightarrow 0$  über, (d. h. läßt man die beiden Flächen (5,2) zusammenrücken), so bleibt von (5,7,2) das halbe negative Residuum an der Stelle  $k = 0$  übrig, so daß wir erhalten:

$$(5,7,3) \quad \Im = -\frac{1}{2} \oint_k \frac{dk}{k |\text{grad}_t E(t)|} = -i\pi \cdot \frac{1}{|\text{grad}_t E(t)|}.$$

Fügen wir die fortgelassenen konstanten Faktoren und die über die Fläche (5,1) zu erstreckende Integration bezüglich  $d\sigma_t$  wieder hinzu, so erhalten wir als vollständigen Ausdruck für den Absorptionsanteil von  $A_{mq}^{K_s}$ :

$$(5,8) \quad A_{mq}^{K_s, \text{Abs.}} = \frac{-2i}{v^2 A} \int \frac{\{\mathfrak{B}^{K_s}(t, \mathfrak{E}_m); \mathfrak{B}^{K_s^*}(t, \mathfrak{E}_q)\}}{|\text{grad}_t E(t)|} d\sigma_t.$$

Die Integration bezüglich  $d\sigma_t$  ist dabei über die Fläche (5,1) zu erstrecken, sofern diese in einem im Grundzustande  $u_0$  unbesetzten Teil des  $\mathfrak{t}$ -Raumes verläuft; andernfalls verschwindet  $A_{mq}^{K_s, \text{Abs.}}$ . Der Vollständigkeit halber schreiben wir hier auch den Streuanteil von  $A_{mq}^{K_s}$  an:

$$(5,9) \quad \left\{ \begin{aligned} A_{mq}^{K_s, \text{Str.}} &= \frac{2}{\pi v^2 A} \int_I \left[ \frac{\{\mathfrak{B}^{K_s}(t, \mathfrak{E}_m); \mathfrak{B}^{K_s^*}(t, \mathfrak{E}_q)\}}{E(t) - E_{K_s} - h\nu} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\{\mathfrak{B}^{K_s^*}(t, -\mathfrak{E}_m); \mathfrak{B}^{K_s}(t, -\mathfrak{E}_q)\}}{E(t) - E_{K_s} + h\nu} \right] d\tau_t. \end{aligned} \right.$$

Dabei ist die Integration bezüglich  $d\tau_t$  über den Integrationsbereich  $I$ , d. h. über den im Grundzustand unbesetzten Teil des  $\mathfrak{t}$ -Raumes zu erstrecken unter Auslassung der Fläche (5,1) in dem erläuterten Sinne. Die Vektoren  $\mathfrak{B}^{K_s}(t, \mathfrak{E}_m)$  in (5,8) und (5,9) sind durch Gl. (4,12) definiert. — In entsprechender Weise wie der  $K_s$ -Anteil lassen sich auch die übrigen Anteile der Zerlegung (4,6) und somit das gesamte  $A_{mq}$  gemäß (5,3) in einen Streu- und einen Absorptionsanteil zerlegen.

1) Vgl. A. Sommerfeld u. G. Schur, Ann. d. Phys. [5] 4. S. 409. 1930.

§ 6. Diskussion der Tensoreigenschaften der Koeffizienten  $A_{mq}$ a) Allgemeine Beziehungen zwischen den Koeffizienten  $A_{mq}$ 

Die Koeffizienten  $A_{mq}^{\text{Str.}}$  und  $A_{mq}^{\text{Abs.}}$  sind im allgemeinen Tensoren, deren Symmetrieeigenschaften wir im folgenden untersuchen wollen. Ihre  $K$ -Anteile sind nach (5,9) bzw. (5,8) durch Volumen- bzw. Flächenintegrale im  $t$ -Raum definiert, wobei im Integranden Tensoren der Form  $\{\mathfrak{M}; \mathfrak{B}\}$  auftreten. Ein solcher Tensor wird in den adjungierten (d. h. konjugiertkomplex-gespiegelten) Tensor überführt gemäß  $\{\mathfrak{M}; \mathfrak{B}\}^+ = \{\mathfrak{B}^*; \mathfrak{M}^*\}$ , d. h. durch Vertauschen des vorderen und hinteren Vektors bei gleichzeitigem Übergang zum konjugiert-komplexen, wie man leicht durch Hinschreiben der Tensorkomponenten sieht. Daraus folgt sofort, daß der zu  $A_{mq}^{\text{Str.}}$  nach Gl. (5,9) adjungierte Tensor aus diesem durch Vertauschen von  $m$  und  $q$  hervorgeht. Das hier am Beispiel des  $K$ -Anteils Gezeigte gilt auch für die übrigen Anteile und somit auch für die vollständige Größe  $A_{mq}^{\text{Str.}}$ , d. h. es bestehen die Beziehungen

$$(6,1,1) \quad (A_{mq}^{\text{Str.}})^+ = A_{qm}^{\text{Str.}},$$

wobei das Zeichen  $+$  den Übergang zum adjungierten (d. h. konjugiertkomplex-gespiegelten) Tensor bedeutet. (Die „Spiegelung“ bezieht sich dabei wohl-bemerkt auf die räumlichen Tensorkomponenten nach Achsen  $x, y, z$  und nicht etwa auf die Indizes  $m$  und  $q$ .) Insbesondere gilt für  $m = q$ , daß die Koeffizienten  $A_{mm}^{\text{Str.}}$  hermitesche Tensoren sind, d. h. solche, die sich aus einem reell-symmetrischen und einem imaginär-antisymmetrischen Tensor zusammensetzen lassen. Setzt man entsprechend (2,9)

$$C_{mq}^{\text{Str.}} = \chi_{m-q} + A_{mq}^{\text{Str.}}$$

und beachtet, daß gemäß (2,3)  $\chi_i = \chi_{-i}^*$  ist, so sieht man, daß auch für die  $C_{mq}^{\text{Str.}}$  die Beziehung besteht:

$$(6,1,2) \quad (C_{mq}^{\text{Str.}})^+ = C_{qm}^{\text{Str.}}$$

Durch ganz entsprechende Überlegungen findet man, daß wegen des von der Residuenbildung herrührenden imaginären Faktors in Gl. (5,8) für die Absorptions-anteile der  $A_{mq}$  die Beziehungen

$$(6,2) \quad (A_{mq}^{\text{Abs.}})^+ = -A_{qm}^{\text{Abs.}}$$

bestehen, d. h.  $A_{mq}^{\text{Abs.}}$  und  $A_{qm}^{\text{Abs.}}$  sind zueinander verkehrt adjungiert, und speziell die  $A_{mm}^{\text{Abs.}}$  sind antihermitesche Tensoren.

Wir werden im folgenden eine Beziehung zwischen den Eigenfunktionen  $\psi(t)$  gebrauchen: da diese Lösungen einer reellen Wellengleichung sind, muß neben  $\psi(t)$  auch das konjugiertkomplexe  $\psi(t)^*$  eine Lösung sein, die zum gleichen Eigenwert  $E(t)$  gehört, und zwar ist offenbar

$$(6,3) \quad \psi(-t) = \psi(t)^*$$

## b) Kristalle mit Symmetriezentrum

Wir betrachten nun den Sonderfall, daß der Kristall ein Symmetriezentrum besitzt. In diesem Fall gilt neben (6,3) für die Eigenfunktionen die weitere Beziehung:

$$(6,4) \quad \psi(\mathfrak{r}, t) = \psi(-\mathfrak{r}, -t).$$

Zusammen aus (6,4) und (6,3) folgt, daß für Kristalle mit Symmetriezentrum auch die Beziehung

$$(6,5) \quad \psi(\mathbf{r}, -\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r})^*$$

besteht, woraus für die Strommatrizelemente folgt:

$$(6,6) \quad j_i^{K*}(\mathbf{r}, -\mathbf{r}) = j_i^{K*}(\mathbf{r}, \mathbf{r}).$$

Wir betrachten nun den Vektor  $\mathfrak{B}^{K*}(\mathbf{r}, \mathfrak{E}_m)$  nach Gl. (4,12). Nach Gl. (6,6) ergibt sich, daß in (4,12) jeweils die zu  $\mathbf{r}$  und  $-\mathbf{r}$  gehörigen Werte des Integranden zueinander konjugiertkomplex sind, so daß also  $\mathfrak{B}^{K*}(\mathbf{r}, \mathfrak{E}_m)$  reell wird. Nach (5,9) und (5,8) erhalten wir somit das Ergebnis, das bei Kristallen mit Symmetriezentrum die Koeffizienten  $A_{mq}^{\text{Str.}}$  (und wie man leicht zeigt auch die  $C_{mq}^{\text{Str.}}$ ) sämtlich reell und die Koeffizienten  $A_{mq}^{\text{Abs.}}$  rein imaginär sind.

### c) Sätze über die Diagonalelemente und Eigenwerte der Tensoren $A_{mm}$

Nach Abschnitt a dieses Paragraphen sind die Koeffizienten  $A_{mm}^{\text{Str.}}$  bzw.  $C_{mm}^{\text{Str.}}$  [Gl. (6,1,1) bzw. (6,1,2) für  $m = q$ ] hermitesche Tensoren und haben als solche reelle Diagonalelemente und Eigenwerte, und die Koeffizienten  $A_{mm}^{\text{Abs.}}$  [Gl. (6,2) für  $m = q$ ] sind antihermitesche Tensoren und haben als solche rein imaginäre Diagonalelemente und Eigenwerte. (Die Worte „Diagonalelement“ und „Eigenwert“ beziehen sich auf die räumlichen Tensorkomponenten nach Koordinaten  $x, y, z$  und haben nichts mit den Indizes  $m$  und  $q$  zu tun.) Auf Grund der Gleichungen (5,8) und (5,9) lassen sich diese Aussagen noch bezüglich des Vorzeichens vervollständigen, und zwar können wir folgende Sätze aussprechen:

a) Die Diagonalelemente und Eigenwerte der Koeffizienten  $A_{mm}^{\text{Str.}}$  sind bei genügend hohen Frequenzen  $\nu$  negativ (und streben mit  $\nu \rightarrow \infty$  gegen Null); bei genügend niedrigen Frequenzen sind sie positiv.

$\beta$ ) Die Diagonalelemente und Eigenwerte der Koeffizienten  $A_{mm}^{\text{Abs.}}$  sind stets negativ-imaginär.

$\gamma$ ) Die Imaginärteile der Eigenwerte von  $A_{mm}$  bzw.  $C_{mm}$  sind stets negativ-imaginär. (Das gleiche gilt auch für die „reduzierten“ Tensoren  $C'_{mm}$ , die im zweiten Teil dieser Arbeit eingeführt werden.)

Zum Beweis dieser Sätze betrachten wir einen Tensor der Form  $\{\mathfrak{B}; \mathfrak{B}^*\}$ , aus dem wir mit einem beliebigen (u. U. komplexen) Einheitsvektor  $\mathbf{e}$  [d. h. einem solchen, für den  $(\mathbf{e}, \mathbf{e}^*) = 1$  ist], den Vektor  $\{\mathfrak{B}; \mathfrak{B}^*\} \mathbf{e}^*$  und ferner das Skalarprodukt (die „Projektion“ des Tensors in Richtung  $\mathbf{e}^*$ )

$$(6,7) \quad (\mathbf{e}, \{\mathfrak{B}; \mathfrak{B}^*\} \mathbf{e}^*) = |(\mathbf{e}, \mathfrak{B})|^2$$

bilden. Dieser offenbar reelle und positive Ausdruck kann als Diagonalelement des Tensors  $\{\mathfrak{B}; \mathfrak{B}^*\}$  bezüglich der durch den Einheitsvektor  $\mathbf{e}$  definierten Achsenrichtung aufgefaßt werden. Daraus folgen mit den Gl. (5,8) und (5,9) für  $m = q$  bereits die Sätze  $\alpha$  und  $\beta$ , soweit sie sich auf Diagonalelemente beziehen. Zum Beweis der Aussagen über Tensoreigenwerte fügen wir noch folgende Betrachtung an: Es sei  $A$  ein beliebiger (u. U. nichthermitescher) Tensor,  $A$  einer seiner Eigenwerte und  $\mathbf{q}$  der zugehörige Eigenvektor. Es gelte also die Gleichung:

$$A \mathbf{q} = \lambda \mathbf{q},$$

durch skalare Multiplikation mit  $q^*$  folgt weiter:

$$(q^*, A q) = A |q|^2,$$

woraus folgt, daß jeder Eigenwert eines Tensors als ein Diagonalelement bezüglich der durch den zugehörigen Eigenvektor definierten Achsenrichtung aufgefaßt werden kann. Dies gilt insbesondere auch dann, wenn die zu den verschiedenen Eigenwerten gehörigen Eigenvektoren nicht aufeinander senkrecht stehen. Daraus folgen die Aussagen der Sätze  $\alpha$  und  $\beta$  über Eigenwerte, sowie mit Benutzung der Zerlegung  $A_{mm} = A_{mm}^{\text{Str.}} + A_{mm}^{\text{Abs.}}$  der Satz  $\gamma$ .

#### d) Ein Spezialfall

Wir wollen nochmals Gl. (6,3) benutzen und zwar jetzt für den allgemeinen Fall eines Kristalls mit oder ohne Symmetriezentrum. Wir betrachten wieder den Vektor  $\mathfrak{B}^{K_s}(\mathfrak{f}, \mathfrak{R}_m)$  nach Gl. (4,12), und zwar wollen wir den Spezialfall behandeln, daß der Faktor  $e^{2\pi i(\mathfrak{R}_m, \mathfrak{r})}$  im Integranden von (4,12) in dem wesentlich in Betracht kommenden Integrationsbereich (d. h. in dem Bereich, in dem die  $K$ -Eigenfunktion der  $s$ -ten Atomsorte wesentlich von Null verschieden ist) näherungsweise = 1 gesetzt werden kann. Dies ist dann der Fall, wenn  $\lambda_m = \frac{1}{|\mathfrak{R}_m|}$  genügend groß ist gegenüber dem Bohrschen Radius der  $s$ -ten Atomsorte. Die Vektoren  $\mathfrak{B}^{K_s}(\mathfrak{f}, \mathfrak{R}_m)$  sind in diesem Falle näherungsweise unabhängig von  $\mathfrak{R}_m$ , also

$$\mathfrak{B}^{K_s}(\mathfrak{f}, \mathfrak{R}_m) = \mathfrak{B}^{K_s}(\mathfrak{f}, 0).$$

Es gilt daher für sie nach (6,3) die Beziehung

$$(6,8) \quad \mathfrak{B}^{K_s}(\mathfrak{f}, \mathfrak{R}_m) = \mathfrak{B}^{K_s^*}(-\mathfrak{f}, \mathfrak{R}_m),$$

woraus weiter folgt, daß in (5,9) und (5,8) jeweils die zu  $\mathfrak{f}$  und  $-\mathfrak{f}$  gehörigen Werte des Integranden zueinander konjugiertkomplex sind. Es ergibt sich also, daß die  $A_{mq}^{\text{Str.}}$ , sofern sie der gemachten Voraussetzung genügen, sämtlich einander gleich und reell sind, und daß die  $A_{mq}^{\text{Abs.}}$  unter der gleichen Bedingung einander gleich und rein imaginär sind.

Nehmen wir, indem wir unseren Spezialfall noch weitergehend spezialisieren, an, daß die  $A_{mq}^{\text{Abs.}}$  verschwinden oder vernachlässigbar sind; dann können alle  $A_{mq}$  durch den reellen symmetrischen Tensor  $A_{00}^{\text{Str.}}$  ersetzt werden und die Größen  $C_{mq}$  nach Gl. (2,9) nehmen die Form an

$$(6,9,1) \quad C_{mq} = \chi_{m-q} + A_{00}^{\text{Str.}}$$

oder abgekürzt, da jetzt  $C_{mq}$  nur von der Differenz  $m - q$  abhängt:

$$(6,9,2) \quad C_{mq} = \psi_{m-q}.$$

In das Gleichungssystem (2,13) eingesetzt ergibt dies die Grundgleichungen in einer Form, in der sie auf Grund anderer Voraussetzungen von L. Posener<sup>1)</sup> aufgestellt und diskutiert wurden.

1) L. Posener, Ann. d. Phys. [5] 19. S. 849. 1934.



§ 7. Frequenzabhängigkeit der Koeffizienten  $A_{mq}$ 

Es bleibt noch die Abhängigkeit der Koeffizienten  $A_{mq}^{\text{Str.}}$  und  $A_{mq}^{\text{Abs.}}$  von der Röntgenfrequenz  $\nu$  zu diskutieren. Vorweg bemerken wir, daß bei großen  $|\mathbf{f}|$  die Vektoren  $\mathfrak{B}^{K_s}(\mathbf{f}, \mathfrak{R}_m)$  der Gl. (4,12) verschwinden, weil dort die Eigenfunktionen  $\psi(\mathbf{f})$  und daher nach Gl. (4,10) auch die Strommatrizelemente  $j_i^{K_s}(\mathbf{f})$  im Integranden von (4,12) räumlich rasch oszillieren.

Wir betrachten nun zunächst den Anteil  $A_{mq}^{K_s, \text{Abs.}}$ , der nach Gl. (5,8) durch ein Integral über die Fläche (5,1):

$$E(\mathbf{f}) = E_{K_s} + h\nu$$

im  $\mathbf{f}$ -Raum dargestellt wird, sofern diese in einen im Grundzustand unbesetzten Teil des  $\mathbf{f}$ -Raumes fällt. Bei Frequenzen  $\nu$  unterhalb der zu den Atomen der Sorte  $s$  gehörigen  $K$ -Kante  $\nu_{K_s}$  verschwindet der Absorptionsanteil  $A_{mq}^{K_s, \text{Abs.}}$ , weil dort die Fläche (5,1) in Bereiche fällt, die im Grundzustand von Elektronen besetzt sind. Dicht oberhalb von  $\nu_{K_s}$  nimmt  $A_{mq}^{K_s, \text{Abs.}}$  seine größten Werte an und fällt bei weiter wachsender Frequenz  $\nu$  ab, wobei wegen der an den Bragg-Brillouinschen Ebenen im  $\mathbf{f}$ -Raum auftretenden Energiesprünge unregelmäßige Schwankungen auftreten<sup>1)</sup>. Bei großen Frequenzen  $\nu$  schließlich verschwindet  $A_{mq}^{K_s, \text{Abs.}}$ , weil dort die Fläche (5,1) in Bereiche großer  $|\mathbf{f}|$  fällt, wo nach der obigen Bemerkung die Vektoren  $\mathfrak{B}^{K_s}(\mathbf{f}, \mathfrak{R}_m)$  und daher der Integrand von (5,8) verschwinden.

Wir betrachten nun den Streuanteil  $A_{mq}^{K_s, \text{Str.}}$  nach Gl. (5,9).

Danach sieht man, daß bei kleinen Frequenzen  $\nu \rightarrow 0$   $A_{mq}^{K_s, \text{Str.}}$  einem endlichen positiven Grenzwert zustrebt. (Die Bezeichnung „positiv“ bezieht sich dabei auf die Diagonalelemente bzw. Eigenwerte des Tensors  $A_{mq}^{K_s, \text{Str.}}$ ; vgl. § 6, Abschnitt c). Bei Annäherung der Frequenz  $\nu$  an die  $K$ -Kante  $\nu_{K_s}$  steigt  $A_{mq}^{K_s, \text{Str.}}$  an und erreicht etwa bei  $\nu = \nu_{K_s}$  seinen größten Wert. Bei Überschreiten von  $\nu_{K_s}$  wechseln Teile des Integranden von (5,9) das Vorzeichen, und  $A_{mq}^{K_s, \text{Str.}}$  fällt daher ab und wird schließlich negativ. Bei weiter wachsender Frequenz  $\nu$  geht schließlich  $A_{mq}^{K_s, \text{Str.}}$  nach Überschreiten eines Minimalwertes, ohne nochmals das Vorzeichen zu wechseln, gegen Null, weil bei großen  $\nu$  der Teil des Integranden, bei dem der Resonanznenner klein ist,

1) Vgl. R. de L. Kronig, a. a. O.

in Bereiche großer  $|\mathbf{f}|$  fällt, wo die Vektoren  $\mathfrak{B}^{\kappa}$  verschwinden, während der Bereich des Integranden bei kleinen  $|\mathbf{f}|$ , wo  $\mathfrak{B}^{\kappa}$  merklich von Null verschieden ist, wegen des dort großen Resonanznenners nichts beiträgt.

Bei großen Frequenzen  $\nu$  verschwindet also sowohl der Streu- wie der Absorptionsanteil von  $A_{mq}$ ; dort sind also die Tensoren  $C_{mq}$  nach Gl. (2,9) durch die skalaren Größen  $\chi_{m-q}$  zu ersetzen, wodurch die Grundgleichungen (2,13) ihre ursprünglich von M. v. Laue aufgestellte Form annehmen<sup>1)</sup>.

1) Vgl. M. v. Laue, a. a. O.

Berlin-Dahlem, Kaiser-Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie.

(Eingegangen 21. Februar 1939)